1.4 El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas

Hasta ahora se ha adoptado la idea de que las fuerzas gravitacionales y las fuerzas eléctricas entre partículas son de acción a distancia, es decir, una partícula ejerce una fuerza gravitacional o eléctrica directa sobre otra partícula, aun cuando las partículas estén muy separadas. Esa interpretación de las fuerzas gravitacionales y eléctricas, como un fantasmal estira y afloja entre cuerpos distantes, es sugerida por la ley de la gravitación de Newton, la ley de Coulomb. Sin embargo, de acuerdo con las ideas modernas, hay una entidad física que funciona como mediador de la fuerza, transportándola a la distancia que hay entre un cuerpo y el otro. A esta entidad se le llama, campo. Un campo gravitante, o con carga eléctrica, genera un campo gravitatorio o eléctrico, que permea en el espacio (aparentemente vacío) que lo rodea, y este campo ejerce presión o atracción siempre que entra en contacto con otro cuerpo. Así, los campos transfieren las fuerzas de un cuerpo a otro mediante la **acción local** o acción por contacto.

Imaginemos dos cargas eléctricas q' y q, consideremos el caso que q' se acerca a q, generándose entre ellas la fuerza eléctrica, la cual va aumentando, debido a que distancia entre cargas disminuye, tal como lo establece la ley de Coulomb. Tal aumento en la fuerza no sucede de manera instantánea, sino que se debe considerar como una señal de q' a q, y de acuerdo con un principio fundamental de la física (teoría de la relatividad), ninguna señal puede propagarse con mayor velocidad que la velocidad de la luz (Figura 1.12). Lo anterior parece indicar que, que a medida que la carga q' se mueve, cierta clase de perturbación física se propaga a través del espacio, de q' a q y ajusta la fuerza eléctrica al valor nuevo, aumentando. Entonces, según nuestro análisis, las cargas ejercen fuerzas entre sí mediante perturbaciones que se generan en el espacio que las rodea. Estas perturbaciones se llaman **campos eléctricos**.

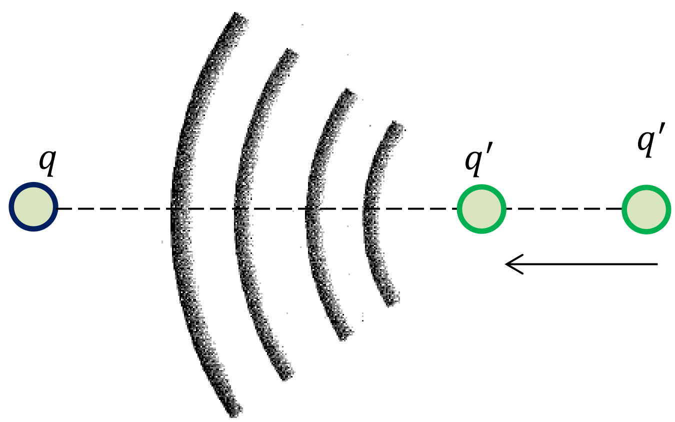

Figura 1.12 Una perturbación procede de la carga q' y llega a la carga q

Los campos son una forma de materia: están dotados de energía y cantidad de movimiento, por lo que existen en un sentido material.

De acuerdo con la ley de Coulomb, como la carga q no se ha movido, no se ha perturbado la forma en la que q causa fuerzas eléctricas sobre otras cargas. Esta desviación temporal entre las fuerzas que ejerce q' sobre q, y q sobre q' significa que, cuando solo se consideran los campos, falla la tercera ley de Coulomb, del equilibrio entre acción y reacción De este modo se necesita una entidad adicional, como el campo, para tomar la cantidad de movimiento y la energía faltantes de las partículas.

Podemos concluir que, la interacción eléctrica entre las cargas es una acción por contacto: una carga q' genera un campo eléctrico que permea el espacio que la rodea, y ejerce fuerzas sobre todas las demás cargas con las que interaccione.

Matemáticamente, el análisis anterior nos lleva primero,

La fuerza que ejerce q' sobre q es, de acuerdo a la ecuación (1.3)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

y separa la expresión en un producto de dos factores: un factor q, característico de la carga puntual sobre la cual se ejerce la fuerza, y un factor $k\frac{q'}{r^2}$, característico de la carga puntual que ejerce la fuerza a la distancia r

$$F = q \times \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\right) \tag{1.18}$$

El segundo factor se define como el **campo eléctrico generado por la carga puntual** q'; este campo eléctrico se representará por E.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2} \tag{1.19}$$

Esto indica que la magnitud del campo eléctrico de la carga puntual q' es directamente proporcional a la magnitud de esa carga, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La fuerza que ejerce el campo sobre la carga es

$$F = qE \tag{1.20}$$

Al igual que la fuerza, el campo eléctrico es un vector. La dirección del campo eléctrico depende del signo de la carga q' (Figura $1.13a$).

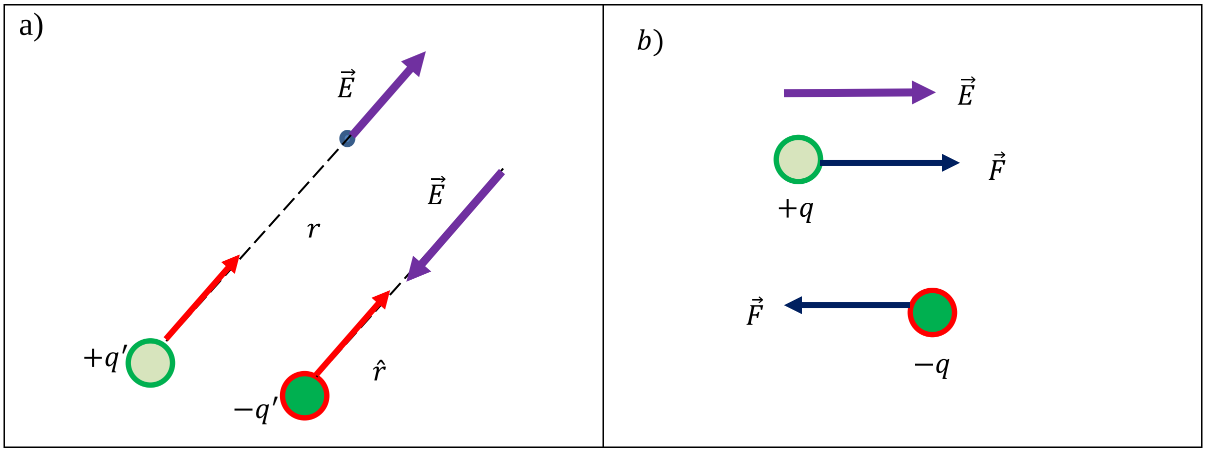

Figura 1.13 a) Una carga q' genera un campo eléctrico $\vec{E}$ a la distancia r. La dirección del campo eléctrico es lo largo del vector unitario $\hat{r}$, es decir, en la dirección radial. b) Sentido de la Fuerza eléctrica producido por un camp eléctrico sobre una carga positiva y negativa.

En la figura $1.13a$ podemos observar que el campo eléctrico se aleja radialmente de q', si q' es positiva, y se acerca radialmente a q' si es negativa. Vectorialmente, el campo eléctrico se define como

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\hat{r} \qquad (1.22)$$

El campo eléctrico $\vec{E}$ en términos de la fuerza eléctrica $\vec{F}$, vectorialmente es

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (1.21)$$

La figura $1.13b$ muestra que si q es positiva, la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la carga tiene la misma dirección del campo $\vec{E}$, pero si q es negativa, la fuerza $\vec{F}$ tiene dirección opuesta al campo $\vec{E}$.

Para definir el campo eléctrico de manera general, podemos determinar el campo eléctrico producido por una distribución arbitraria de cargas, como por ejemplo una nube de tormenta, una línea de transmisión, un cable de la red domiciliaria, etc. Entonces, para calcular el campo eléctrico que genera una distribución de cargas en determinado punto se tomará una carga de prueba q, y se colocará en esa posición. Entonces, la carga q recibirá una fuerza eléctrica $\vec{F}$. Se define entonces el campo eléctrico $\vec{E}$ como la fuerza $\vec{F}$ dividida entre la magnitud q de la carga de prueba:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{1.23}$$

Al dividir, la carga q aísla el factor característico de la distribución de la carga, y se elimina el factor característico de la carga de prueba.

La ecuación (1.23) quiere decir que, el campo eléctrico es la fuerza por unidad de carga. Se observa que, con esta definición, el campo eléctrico es independiente de la magnitud de la carga de prueba. El campo eléctrico es un concepto muy útil: para determinada distribución de carga, en lugar de calcular la fuerza que ejercen las cargas sobre otra carga q en algún punto, el campo eléctrico nos indica la fuerza por unidad de carga sobre cualquier carga colocada en ese punto.

Las unidades *SI* del campo eléctrico es el Newton por Coulomb. La Tabla 1.1, muestra las magnitudes de algunos campos eléctricos específicos.

Tabla 1.1 Algunos campos eléctricos

Configuración y lugar	**Magnitud del campo eléctrico** $\left(\frac{N}{C}\right)$
En la Superficie de un pulsar	$\approx 10^{14}$
En la órbita del electrón en el átomo de H_2	$6 * 10^{11}$
En un tubo de rayos *X*	$5 * 10^{6}$
Rompimiento eléctrico del aire	$3 * 10^{6}$
En un acelerador Van de Graaff	$2 * 10^{6}$
Dentro de un rayo	$\approx 10^{4}$
Bajo una nube de tormenta	$1 * 10^{4}$
Cerca de un transmisor de radar (EPS-6)	$7 * 10^{3}$
En la luz solar (*rms*)	$1 * 10^{3}$
En la atmosfera (buen tiempo)	$1 * 10^{2}$
En la luz de un láser pequeño (*rms*)	$1 * 10^{2}$
En un tubo de alumbrado fluorescente	10

En una onda de radio	$\approx 10^{-1}$
Dentro del cableado domestico	$\approx 3 * 10^{-2}$

Ejemplo 1.10 **Magnitud del campo eléctrico para una carga puntual**

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto situado a $2.0m$ de una carga puntual $q = 4.0nC$? (La carga puntual puede representar cualquier objeto pequeño cargado con este valor de q, si las dimensiones del objeto son mucho menores que la distancia entre el objeto y el punto del campo.)

Planteamiento: Se dan la magnitud de la carga y la distancia que hay del objeto al punto del campo, por lo que usamos la ecuación (1.19) para calcular la magnitud del campo E.

Ejecutar: El campo eléctrico producido por una carga puntual en un punto P es

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}$$

Sustituyendo los valores numérico de q' y r

$$E = 9.0 * 10^9 \frac{Nm^2}{c^2}\frac{4.0 * 10^{-9}C}{(2.0m)^2} \quad \Rightarrow E = 9.0\frac{N}{C}$$

1.5 Superposición de campos eléctricos

El campo eléctrico total en P es la suma vectorial de los campos en P debidos a cada carga puntual en la distribución de carga (figura 1.12). Éste es el principio de superposición de campos eléctricos.

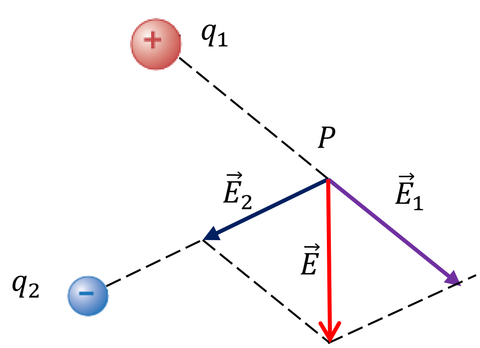

Figura 1.12 Ilustración del principio de superposición de campos eléctricos.

Así, para calcular el campo eléctrico total en algún punto en el espacio, tan solo se suman los vectores individuales, cuyas magnitudes se determinan por la ecuación (1.19), y las direcciones son desde las cargas positivas, o hacia las cargas negativas.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_1 \ldots \tag{1.24}$$

Ejemplo 1.11 **Vector de campo eléctrico de una carga puntual**

Una carga puntual $q = -8 * 10^{-9} C$ se localiza en el origen. Obtenga el vector de campo eléctrico en el punto del campo $x = 1.2m$, y $y = -1.6m$.

Planteamiento: En este problema se pide calcular el vector de campo eléctrico $\vec{E}$ debido a una carga puntual. Entonces, es necesario obtener ya sea las componentes de $\vec{E}$, o su magnitud y dirección. En la Figura 1.13 se muestra la situación

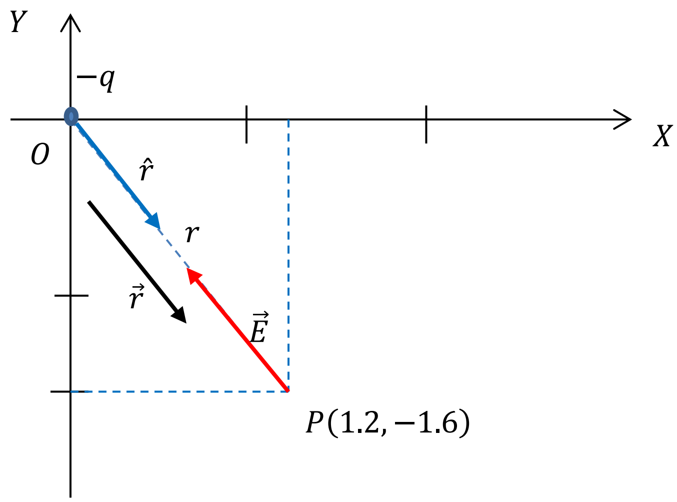

Figura 1.13 El esquema para este problema.

Ejecutar: El campo eléctrico, producido por una carga puntual e un punto P, de acuerdo a la ecuación 1.22.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\hat{r}$$

La distancia entre la carga localizada en 0 (que en este ejemplo está en el origen O) y el punto P en el campo, es

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.2m)^2 + (-1.6m)^2} \Rightarrow \quad r = 2m$$

El vector unitario $\hat{r}$ está dirigido del punto de origen al punto del campo P. Es igual al vector de desplazamiento $\vec{r}$ del punto de origen al punto del campo (que en la figura 1.13 se ilustra desviado a un lado para que no oculte los otros vectores), dividido entre su magnitud r:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}{r} = \frac{1.2\hat{\imath} - 1.6\hat{\jmath}}{2} \quad \Rightarrow \hat{r} = 0.60\hat{\imath} - 0.80\hat{\jmath}$$

Entonces, el vector de campo eléctrico es

$$\vec{E} = 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{(-8 * 10^{-9} C)}{(2m)^2} (0.60\hat{\imath} - 0.80\hat{\jmath}) = \left(18 \frac{N}{C}\right) (0.60\hat{\imath} - 0.80\hat{\jmath})$$

$$\vec{E} = \left(11 \frac{N}{C}\right) \hat{\imath} - \left(14 \frac{N}{C}\right) \hat{\jmath}$$

Ejemplo 1.12 **Campo eléctrico producido por un dipolo**

Se tiene dos cargas de magnitudes iguales y signos contrarios, $\pm Q$, separadas por una distancia d. Este arreglo de cargas, similar a las que ejercen las cargas del ejemplo 1.5, se llama dipolo eléctrico. Calcular el campo eléctrico en un punto equidistante a las dos cargas, a una distancia x de su punto medio (véase figura 1.14). ¿Cuál es la dependencia entre este campo "campo dipolar" y la distancia, para $x \gg d$?

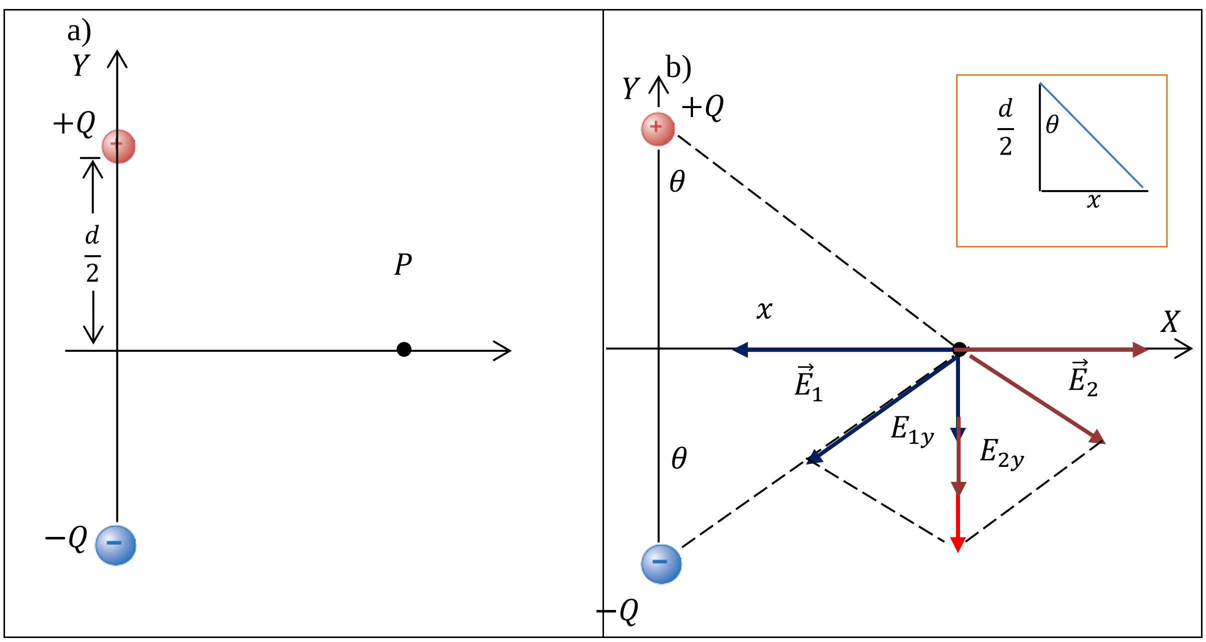

Figura 1.14 Dos cargas puntuales, $+Q$ y $-Q$ y un punto P en el eje x. El campo eléctrico neto $\vec{E}$ en el punto P es la suma vectorial de las aportaciones de $\vec{E}_1$, debido a $-Q$, de $\vec{E}_2$, debido a $+Q$.

Planteamiento: Se necesita encontrar el campo eléctrico total en un punto originado por las dos cargas puntuales. Debemos usar el principio de superposición

Ejecutar:

En el punto P, el campo eléctrico debido a la carga $+Q$ apunta alejándose de ella, y el campo eléctrico debido a la carga $-Q$ apunta hacia ella, como se puede observar en la figura. Como vemos, las componentes del campo eléctrico de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se anulan, mientras que las componentes y, E_{1y} y E_{2y} son iguales, por tanto se suman por ir en la misma dirección, esto es

$$E = -\left(E_{1y} + E_{2y}\right) = E_{1y} + E_{1y} = -2E_1 cos(\theta) \tag{1.25}$$

Donde según la figura $1.14b$, $E_{1y} = E_{1y} = E_1 cos(\theta)$

La magnitud de cada uno de los dos campos eléctricos individuales son:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{1.25a}$$

$$\text{donde,} \qquad r^2 = x^2 + \frac{d^2}{4} \tag{1.25b}$$

Sustituyendo la ecuación $(1.25b)$ en $(1.25a)$ y luego (1.25), resulta

$$E = -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2 + \frac{d^2}{4}} cos(\theta) \tag{1.25c}$$

Pero

$$cos(\theta) = \frac{\frac{d}{2}}{r} = \frac{d}{2r} = \frac{d}{2\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)} \tag{1.25d}$$

Sustituyendo la ecuación $(1.25d)$ en $(1.25c)$, resulta

$$E = -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2 + \frac{d^2}{4}}\frac{d}{2\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)}$$

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.25e}$$

Comentarios:

Cuando $x \gg d$, pierde importancia d^2, comparación con x^2, y queda

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^3} \qquad (1.25f)$$

Este comportamiento $\frac{1}{x^3}$ es característico del campo dipolar eléctrico a grandes distancias en cualquier dirección, y no solo a lo largo de la mediatriz.

1.6 Líneas de campo eléctrico

El concepto de campo eléctrico es un tanto elusivo debido a que ningún campo eléctrico puede verse directamente. Para visualizarlos, las líneas de campo eléctrico son de gran ayuda y los hace parecer más reales. Una línea de campo eléctrico es una recta o curva imaginaria trazada a través de una región del espacio, de modo que es tangente en cualquier punto que esté en la dirección del vector del campo eléctrico en dicho punto Figura $1.15a$. También se ilustran algunas líneas de campo eléctrico en un plano que contiene b) una sola carga positiva; c) dos cargas de igual magnitud, una positiva y otra negativa (un dipolo); y d) dos cargas positivas iguales

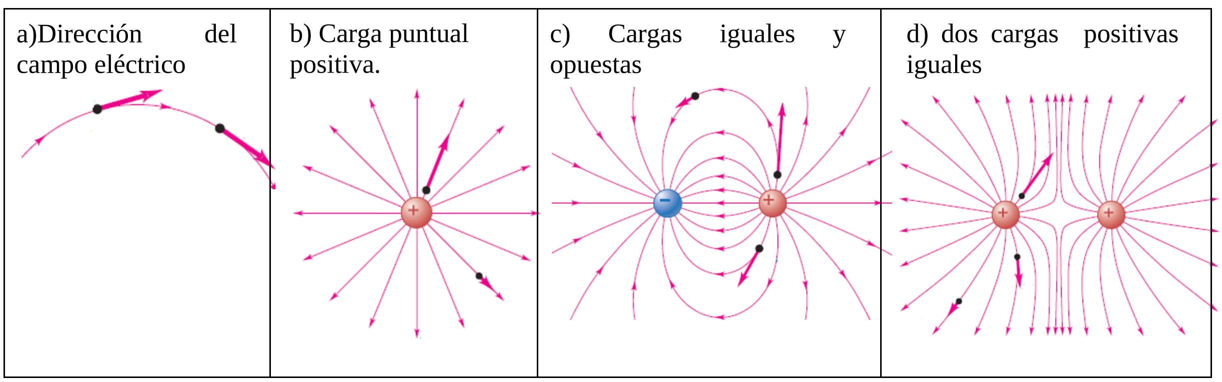

Figura 1.15 Líneas de campo eléctrico, a) La dirección del campo eléctrico en un punto cualquiera es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto. Líneas de campo eléctrico para tres diferentes distribuciones de carga. En general, la magnitud de es diferente en distintos puntos a lo largo de una línea de campo dada.

Movimiento en un campo eléctrico uniforme

Consideremos ahora una partícula cargada, la cual pasa a través de dos placas, en las que se ha generado un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ (figura 1.16). La partícula siente una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$.

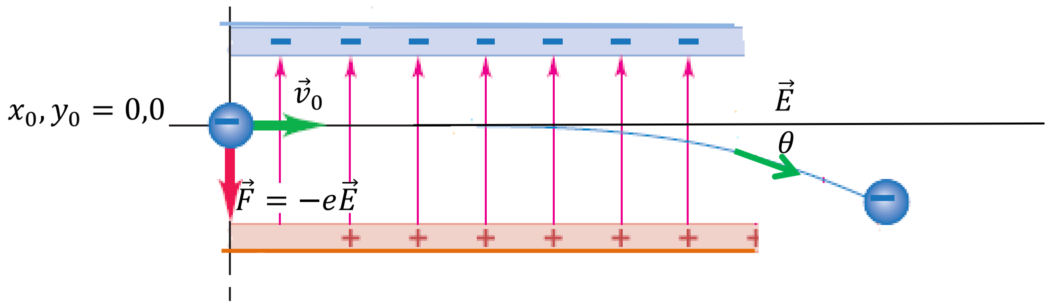

Figura 1.16 Trayectoria parabólica de un electrón en un campo eléctrico uniforme

Si la partícula a considerar, es un electrón

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

En equilibrio, por la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.26}$$

Entonces,

$$m\vec{a} = -e\vec{E} \qquad \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E} \tag{1.26a}$$

Lo que implica que la aceleración es constante.

Recordemos que para una aceleración constante en dos dimensiones, la solución de las componentes de la velocidad, son

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad\qquad v_y = v_{0y} - a_y t \tag{1.26b}$$

Donde v_{0x} y v_{0y}, son las componentes de la velocidad inicial, $\vec{v}_0$. Y

$$a_x = -\frac{e}{m}E_x \qquad\qquad a_y = -\frac{e}{m}E_y \tag{1.26c}$$

la solución a la posición de la partícula en cualquier instante es;

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad\qquad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{1.26d}$$

Donde x_0 y y_0, especifican las posiciones iniciales de la partícula. Recordemos, que en el caso gravitacional uniforme, el resultado fue el movimiento parabólico, donde la posición de la partícula describe una parábola. Igual sucede con los campos eléctricos Uniformes, como demostramos previamente. Una diferencia con el movimiento de una partícula bajo la acción de la fuerza de la gravedad es que la carga puede ser positiva o negativa, y que los campos eléctricos pueden dirigirse en cualquier dirección.

Analizando este movimiento en particular, observamos que la velocidad a lo largo del eje horizontal es constante, es decir,

$$v_x = v_{0x} = v_0 \tag{1.26e}$$

Por lo tanto la aceleración a lo largo de este eje es, cero.

A lo largo del eje y, la velocidad cambia con el tiempo, siendo $v_{0y} = 0$

$$v_y = v_{0y} - a_y t = -a_y t \tag{1.26f}$$

la aceleración corresponde a

$$a_y = -\frac{e}{m}E_y = -\frac{e}{m}E \tag{1.26g}$$

La posición de la partícula en cualquier tiempo queda determinada por las componentes

$$x = x_0 + v_{0x}t \qquad\qquad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{1.26h}$$

Considerando, $x_0 = y_0 = 0$; y $a_y = -\frac{e}{m}E$, resulta

$$x = v_0 t \qquad\qquad y = -\frac{e}{2m}Et^2 \tag{1.26i}$$

Para eliminar t, en las ecuaciones de las ecuaciones $(1.26i)$

$$y = -\frac{e}{2m}E_y\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{eE}{v_0^2}x^2 \tag{1.27}$$

Esta es la ecuación de una parábola, como la trayectoria de un proyectil que se lanzara horizontalmente en el campo gravitacional de la Tierra (que vimos sección 2.3). Para una velocidad inicial dada del electrón, la curvatura de la trayectoria depende de la magnitud E del campo. Si invirtiéramos los signos de las dos placas de la figura 1.16, la dirección de también se invertiría, en tanto que la trayectoria del electrón sería una curva hacia arriba, no hacia abajo.

El campo eléctrico entre placas conductoras cargadas se utiliza para controlar la trayectoria de los haces de electrones en los osciloscopios.

El ángulo de salida se determina con la dirección final del movimiento del electrón al salir de la región del campo eléctrico

$$tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x} \qquad (1.27a)$$

Pero, según la ecuación $(1.26e)$

$$v_x = v_{0x} = v_0$$

Y, de acuerdo a la ecuación$(1.26f)$

$$v_y = -a_y t = -\frac{e}{m}E\frac{x}{v_0} = -\frac{eEx}{mv_0} \qquad (1.27b)$$

Finalmente

$$tan(\theta) = -\frac{\frac{eEx}{mv_0}}{v_0} = -\frac{eEx}{mv_0^2}$$

$$tan(\theta) = -\frac{eEx}{mv_0^2} \qquad (1.28)$$

El signo negativo, implica que la partícula se desvía por debajo del eje x, tal como se observa en la figura.

Ejemplo 1.13 **Campo eléctrico**

Una fresadora iónica (Figura a) usa un haz de iones de galio ($1.132 * 10^{-25}Kg$) para maquinar microestructura en una pieza. Se usa una región de campo eléctrico uniforme, entre las láminas paralelas de carga, para para tener un control preciso de la dirección del haz. Los átomos de galio simplemente ionizados, con una velocidad inicial de $1.8 * 10^{-4}\,{}^{m}/_{s}$ entran a una región $2.0cm$ de longitud, de campo electrico uniforme que apunta verticalmente hacia arriba, como se muestra en la figura b. Los iones se dirigen mediante el campo eléctrico y salen de la región del mismo formando el ángulo que se ve. Si el campo eléctrico se ajusta al valor $E = 90\,{}^{N}/_{C}$. ¿cuál es el ángulo θ de salida?

a) b)

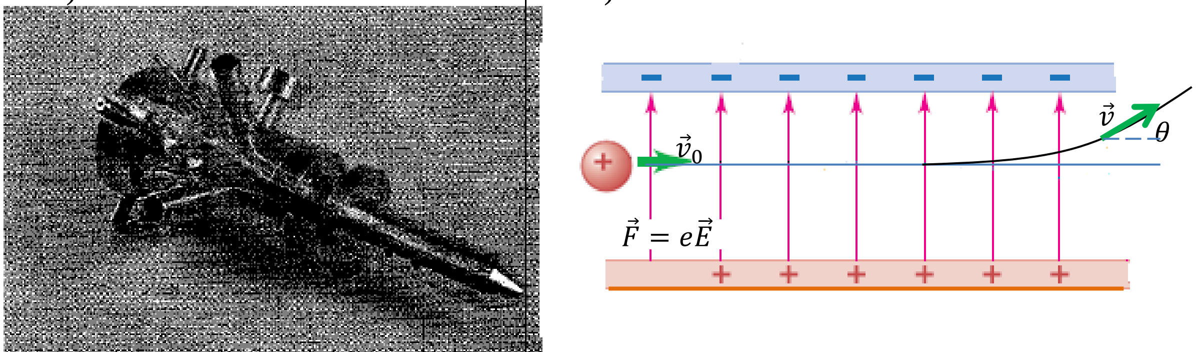

Figura 1.17 a) cañón de electrones de una fresadora iónica. b) Movimiento de un haz de iones de galio visto como una sola partícula de carga positiva en un campo eléctrico uniforme.

Planteamiento: Del análisis de la situación anterior, teníamos un electrón, ahora el caso corresponde a un protón (haz de iones visto como una sola partícula positiva), en este sentido, solo tenemos que reemplazar, el signo negativo en la ecuación para θ en la ecuación (1.28) por el signo +. Esto es,

$$tan(\theta) = \frac{eEx}{mv_0^2}$$

$$tan(\theta) = \frac{1.6 * 10^{-19}C \times 90\, {}^{N}/_{C} \times 2.0 * 10^{-2}m}{1.132 * 10^{-25}Kg \times (1.8 * 10^4\, {}^{m}/_{s})^2}$$

$$tan(\theta) = \frac{2.88 * 10^{-19}}{3.66768 * 10^{-17}}$$

$$tan(\theta) = 7.8 * 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \theta = tan^{-}(7.8 * 10^{-3}) = 0.44^0$$

1.7 Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

Hasta ahora hemos considerado que la carga es discreta, que está cuantizada; esto es, siempre se presenta en múltiplos enteros de la carga fundamental. Sin embargo, en una descripción de la distribución de carga en campos macroscópicos, con frecuencia se puede pasar por alto la naturaleza discreta de la carga, y en general basta con considerar que la carga es un "fluido" continuo con una densidad de carga que varía más o menos uniformemente en el cuerpo cargado.

El principio de superposición sigue siendo válido para las distribuciones continuas de carga; solo se requiere sumar las pequeñas contribuciones individuales del campo eléctrico debido a cada pequeña carga. Supóngase que una región pequeña contiene una carga dQ, y aporta un campo de magnitud dE en algún punto donde se desea conocer el campo total. Si esa región es suficientemente pequeña es posible considerar que su contribución es la de una carga puntual, Entonces

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} \tag{1.29}$$

Para una distribución de carga en línea (como la de una varilla de plástico cargada, larga y delgada), usamos λ (letra griega lambda) para representar la densidad lineal de carga (carga por unidad de longitud, medida en C/m). Cuando la carga está distribuida sobre una superficie (como la superficie del tambor formador de imágenes de una impresora láser), se usa σ (sigma) para representar la densidad superficial de carga (carga por unidad de área, se mide en C/m^2). Y cuando la carga se distribuye en un volumen, se usa r (ρ) para representar la densidad volumétrica de carga (carga por unidad de volumen, C/m^3).

Ejemplo 1.14 **Campo eléctrico de una varilla**

Una carga eléctrica, Q, positiva está distribuida uniformemente a lo largo de una línea con longitud de $2a$ que se ubica sobre el eje y, entre $y = +a$ y $y = -a$ 1a. (Ésta sería la representación de una de las varillas cargadas de la figura 1.18.) Calcule el campo eléctrico en el punto P sobre el eje X, a una distancia x del origen.

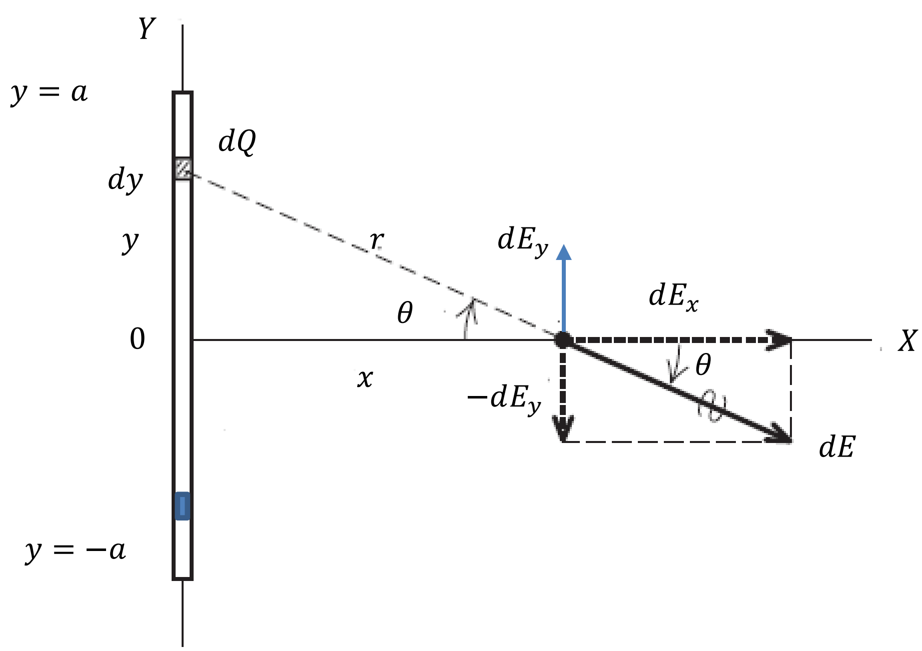

Figura 1.18 Esquema para este problema

Planteamiento: Se necesita encontrar el campo eléctrico en el punto P en función de la coordenada x. El eje X es el bisector perpendicular de la línea cargada, por lo que, podemos utilizar un argumento de simetría.

Se divide la línea de carga en segmentos infinitesimales, cada uno de los cuales actúa como carga puntual; sea dy la longitud de cualquier segmento localizado a la altura y. Si la carga se distribuye de manera uniforme, la densidad lineal de carga λ, entonces la cantidad de carga contenido en un elemento infinitesimal dy

$$dQ = \lambda dy = \frac{Q}{2a} dy \qquad (1.30)$$

El campo eléctrico producido por este elemento de carga en el punto P según la ecuación (1.29), es

$$dE = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dy}{2ar^2} \qquad (1.30a)$$

Pero en la figura 1.18, $r^2 = x^2 + y^2$, que al sustituirlo en la ecuación $(1.30a)$, resulta

$$dE = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dy}{2a(x^2 + y^2)} \qquad (1.30b)$$

Pero el campo eléctrico tiene dos componentes

$$dE = dE_x + dE_y \qquad (1.30c)$$

Donde

$$dE_x = dEcos(\theta) \qquad dE_y = dEsen(\theta) \qquad (1.30d)$$

Por simetría, la componente del campo en el eje $y, (dE_y)$ se anula. Entonces, el campo eléctrico resultante, será la suma de todas las contribuciones del campo eléctrico a lo largo del eje de las X

$$dE_x = dEcos(\theta) \quad \Rightarrow \quad dE_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dy}{2a(x^2 + y^2)} cos(\theta) \qquad (1.30f)$$

En la figura 1.18 observamos que,

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Entonces, al sustituir este resultado en la ecuación $(1.30f)$, resulta

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dy}{2a(x^2+y^2)}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dE_x = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dy}{2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.30g}$$

Integrando, la ecuación $(1.30g)$, resulta en

$$\int_0^{E_x} dE_x = \int_{-a}^{+a}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdy}{2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nuestro ejercicio finaliza resolviendo la integral del lado derecho. Para ello, pueden consultar el Libro MATHEMATICAL AND HANDBOOK OF FORMULAS AND TABLES, disponible en su versión digital en el sitio Web del profesor (www.unet.edu.ve/gilbpar). La integral a resolver esta en la página 76 y corresponde a la número 17.9.15.

$$17.9.15 \int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

Comparando esta integral con la nuestra, para nosotros $dy = dx$ y $x = a$

Entonces

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{2a}\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg]_{-a}^{+a}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{2a}\left(\frac{a}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{2a}\left(\frac{2a}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}} \tag{1.31}$$

En forma vectorial

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}}\hat{\imath} \tag{1.32}$$

Comentarios:

Si el punto P se ubica muy lejos de la línea de carga en comparación con la longitud de la línea, el campo en P debería ser mismo que el de una carga puntual. En este caso, se vería la varilla de longitud $2a$, como un punto, pues $x \gg a$, lo que impilca que $a \to 0$ en nuestra ecuación

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}$$

En forma vectorial

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Ahora, al contrario, supongamos que la varilla es muy larga, es decir, $a \gg x$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}}\hat{\imath}$$

Recordemos que

$$\lambda = \frac{Q}{2a} \qquad \Rightarrow Q = 2a\lambda$$

Entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}}\hat{\imath} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\lambda}{x\sqrt{x^2+a^2}}\hat{\imath}$$

Dividiendo el numerado y el denominador de la expresión por a

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\lambda}{x\sqrt{x^2+a^2}}\hat{\imath} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{2a\lambda}{a}}{x\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}}}\hat{\imath} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}\hat{\imath}$$

Recordemos que estamos considerando una varilla muy larga, es decir, un varilla que se extiende entre $y = -\infty$ a $y = \infty$, esta situación se puede incorporar en nuestro resultado considerando ahora que $a \gg x$

Entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{x\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}} \hat{\imath} \quad \text{como } a \gg x, \quad \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \approx 1$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{x} \hat{\imath} \tag{1.33}$$

Así, el campo eléctrico debido a una línea de carga de longitud infinita es proporcional a $\frac{1}{x}$, y no a $\frac{1}{x^2}$ como fue el caso para una carga puntual. Si λ es positiva, la dirección de $\vec{E}$ es radial hacia fuera con respecto a la recta, y si λ es negativa es radial hacia dentro. En la naturaleza no existe en realidad nada como una línea infinita de carga; no obstante, cuando el punto del campo está suficientemente cerca de la línea, hay muy poca diferencia entre el resultado para una línea infinita y el caso finito de la vida real.

Actividad 1.2 **Campo eléctrico de un una varilla infinita**

Una carga eléctrica, Q, positiva está distribuida uniformemente a lo largo de una línea con longitud de $2a$ que se ubica sobre el eje x, entre $x = +\frac{a}{2}$ y $x = -\frac{a}{2}$ 1a. (Ésta sería la representación de una de las varillas cargadas de la figura 1.19.) Calcule el campo eléctrico en el punto P sobre el eje X, a una distancia x del origen.

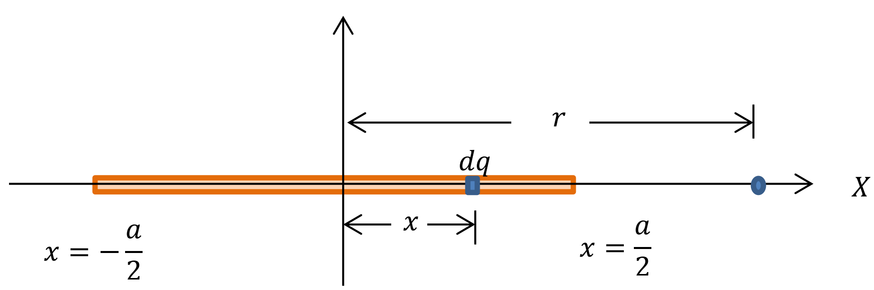

Figura 1.19 Nuestro esquema

Actividad 1.3 **Campo eléctrico de un una varilla infinita**

Calcule el campo eléctrico de una varilla muy larga que porta la carga λ por unidad de longitud (figura 1.20).

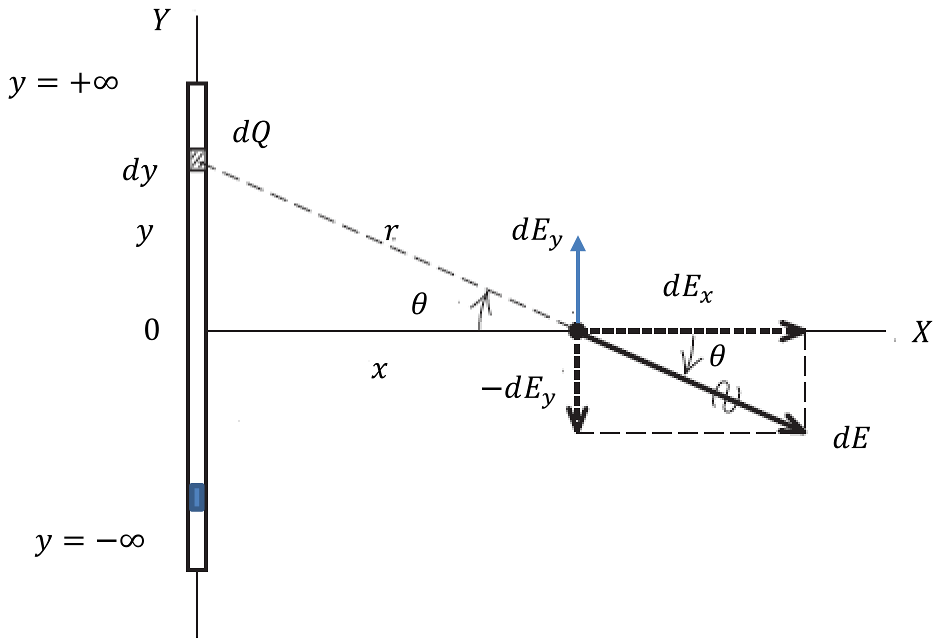

Figura 1.20 Esquema para este problema

Ejemplo 1.15 **Campo eléctrico de un anillo con carga**

Un conductor en forma de anillo con radio a tiene una carga total Q distribuida de manera uniforme en todo su perímetro (figura 1.21). Encuentre el campo eléctrico en el punto P que se localiza sobre el eje del anillo a una distancia x del centro.

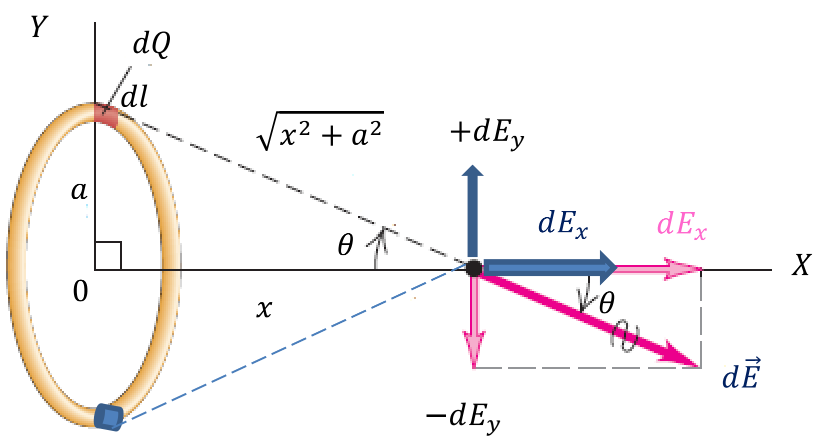

Figura 1.21 Nuestro esquema

Planteamiento: El punto del campo se localiza de manera arbitraria sobre el eje X, como se indica en la figura. La incógnita es el campo eléctrico expresado en ese punto, expresado en función de la coordenada x.

El cálculo de $\vec{E}$ se simplifica mucho debido a que el punto P del campo se ubica sobre el eje de simetría del anillo. En un primer caso, cada segmento de longitud dl, que contiene una carga dQ, le corresponde otro en el lado opuesto, produciendo en cada punto un campo dE_y sobre el eje X (punto P) que se anula con el otro dl. Mientras que en el caso de la componente dE_x, cada segmento sobre el anillo contribuye a uno, todos apuntando hacia la derecha.

Entonces

$$dE_x = dEcos(\theta) \tag{1.34}$$

Donde, la magnitud de dE, según la ecuación (1.29)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1.34a}$$

Donde hemos sustituido $dQ = \lambda dl$

Al sustituir la ecuación $(1.34a)$ en (1.34), resulta que la componente x del campo eléctrico, es

$$dE_x = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}cos(\theta) \tag{1.34b}$$

De la figura 1.21 observamos que

$$r^2 = x^2 + a^2 \quad \text{y} \quad cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Al sustituir r^2 y $cos(\theta)$ obtenidos de la figura 1.18 en la ecuación $(1.34b)$, resulta

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{(x^2 + a^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x dl}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Al integrar

$$\int_{E_x} dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi a} dl$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(2\pi a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2\pi a\lambda)x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En forma vectorial

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\imath} \tag{1.35}$$

Nuestro resultado para demuestra que en el centro del anillo $(x=0)$, el campo es igual a cero, lo que era de esperarse: las cargas en los lados opuestos del anillo empujarían en direcciones opuestas a una carga de prueba que se situara en el centro, y la suma de las fuerzas sería cero.

Comentarios: Ahora si consideramos, el caso donde el punto P esta muy lejos, es decir $x \gg a$ (a es despreciable con respecto a x). En ese punto observaríamos el aro como un punto, donde toda su carga está concentrada en dicho punto.

Entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\imath} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{x^3}\hat{\imath} \qquad \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Que era el resultado esperado para una carga puntual

Ejemplo 1.14 **Campo eléctrico de un disco con carga uniforme**

Encuentre el campo eléctrico que genera un disco de radio R con densidad superficial de carga (carga por unidad de área) positiva y uniforme, σ, en un punto a lo largo del eje del disco a una distancia x de su centro (figura 1.22). Suponga que x es positiva.

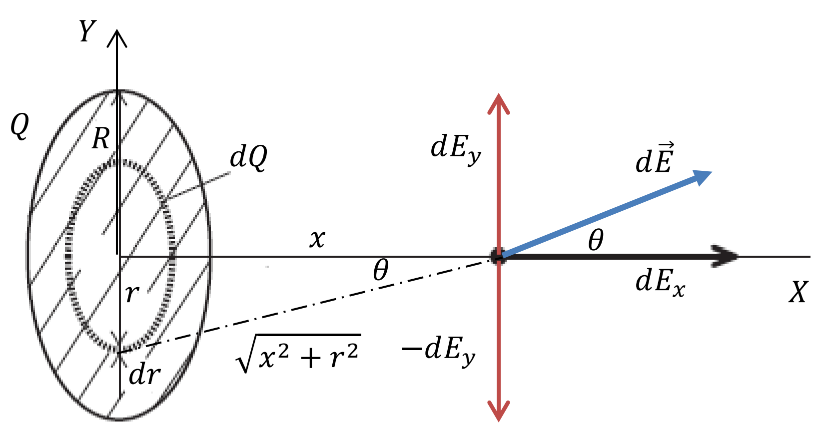

Figura 1.22 Nuestro esquema

Planteamiento: Se representa la distribución de carga como un conjunto de anillos concéntricos de carga dQ, como se indica (Figura 1.21). Si se conoce el campo de un solo anillo sobre su eje de simetría, lo que tenemos que hacer es sumar las contribuciones de los anillos, y con esto estaríamos obteniendo el campo del disco de radio R.

Si la carga se distribuye de manera uniforme, la densidad lineal de carga σ, entonces la cantidad de carga contenido en un elemento infinitesimal dr de longitud $2\pi r$

$$dQ = \sigma(2\pi r dr) \tag{1.36}$$

El campo eléctrico producido por este elemento de carga en el punto P , de acuerdo ala ecuación (1.29) es

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{x^2+r^2} \quad \Rightarrow \quad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma r dr}{x^2+r^2} \tag{1.36a}$$

Pero el campo eléctrico tiene dos componentes

$$dE = dE_x + dE_y \tag{1.36b}$$

Donde

$$dE_x = dEcos(\theta) \qquad\qquad dE_y = dEsen(\theta) \tag{1.36c}$$

Por simetría, la componente del campo en el eje y, se anula por simetría

$$dE = dE_x = dEcos(\theta) \tag{1.36d}$$

Sustituyendo la ecuación $(1.36a)$ en la ecuación $(1.36d)$, resulta

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma r dr}{x^2+r^2}cos(\theta) \tag{1.36e}$$

De la figura 1.22 observamos que

$$cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Entonces,

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma rdr}{x^2 + r^2}\frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Al integrar

$$\int_{E_x} dE_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

Donde

$$u = x^2 + r^2 \quad \Rightarrow du = 2rdr \quad \Rightarrow \frac{du}{2} = rdr$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}}\Bigg]_0^R\right) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x}\right)$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \qquad (1.37)$$

Comentarios:

Suponga que se incrementa el radio R del disco y se agrega simultáneamente carga, de manera que la densidad superficial de carga σ (carga por unidad de área) se mantiene constante (Este es el caso de un lámina infinita). En el límite en que R es mucho mayor que la distancia x, es decir, $R \gg x$, el campo eléctrico es

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

El segundo término dentro del paréntesis se puede reducir a

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \rightarrow \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{R^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}}$$

Entonces,

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}}\right)$$

$$\text{Y como,} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \to 0$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{1.38}$$

El resultado final no contiene la distancia x al plano, por lo que el campo eléctrico producido por una lámina cargada, plana e infinita, es independiente de su distancia a la lámina.

Actividad 1.4 **Fuerza eléctrica que ejerce un disco cargado sobre una carga puntual**

a) Encuentre la fuerza eléctrica que ejerce un disco de radio R con densidad superficial de carga (carga por unidad de área) positiva y uniforme, σ, sobre una carga q colocada a lo largo del eje del disco a una distancia x de su centro. Suponga que x es positiva. b) Estudie el caso asintótico cuando $x \gg R$ (Caso dos cargas puntuales), verifique que el resultado obtenido en la parte a) conduce a

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}$$

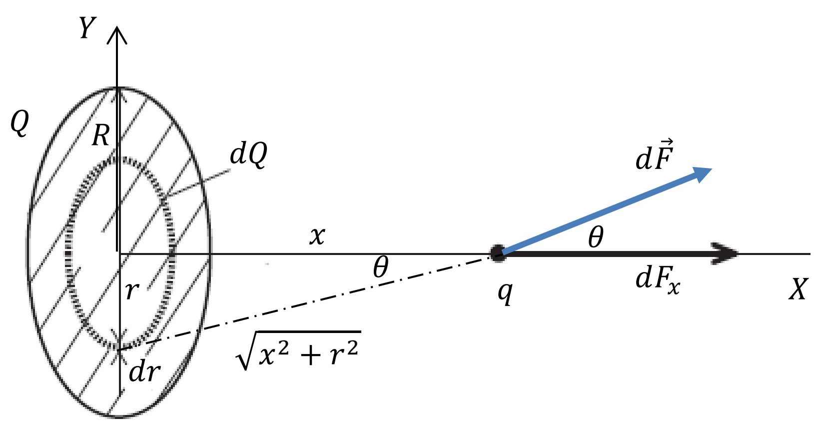

Figura 1.23 Nuestro esquema