

2 Ley de Gauss

2.1 Definición de flujo eléctrico

Considere una superficie arbitraria con forma de rectángulo de Área A . Supóngase que esa superficie está sumergida en un campo eléctrico constante \vec{E} (Figura 2.1). El campo eléctrico forma cierto ángulo con la superficie; para ello introducimos el vector unitario \hat{n} perpendicular a la superficie, de tal forma que el ángulo que hace el campo eléctrico \vec{E} , es con respecto a este vector. Como podemos observar, el vector campo eléctrico tiene dos componentes, una tangencial, E_{\parallel} , es decir, paralela a la superficie, y otra normal, E_{\perp} o perpendicular a ella. El flujo eléctrico Φ_E que atraviesa la superficie se define como el producto del área A por la componente normal del campo eléctrico, el flujo es

$$\Phi_E = E_{\perp}A \quad 2.1$$

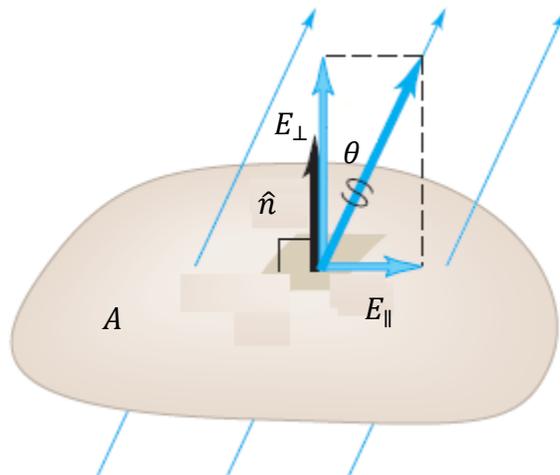


Figura 2.1 Definición de flujo eléctrico

Las unidades *SI* del flujo eléctrico es la unidad de campo eléctrico por unidad de área: esto es, $\left(\frac{N}{C}\right)m^2$ o $\frac{Nm^2}{C}$.

De acuerdo a la figura 2.1, la componente normal E_{\perp} , también se puede expresar de la forma

$$E_{\perp} = E \cos(\theta)$$

El flujo eléctrico Φ_E , de acuerdo a la ecuación (2.1) es

$$\Phi_E = E \cos(\theta)A$$

Por definición de producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\theta)$. Entonces

$$\Phi_E = E\cos(\theta)A = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad 2.2$$

Donde \vec{A} es un vector de área, definido por $\vec{A} = \hat{n}A$.

Consideremos los tres casos siguientes

- La superficie está de frente al campo eléctrico
 \vec{E} y \vec{A} son paralelos; $\Rightarrow \Phi_E = EA$
- La superficie está inclinada un ángulo θ , respecto al campo eléctrico
El ángulo entre \vec{E} y \vec{A} es θ ; $\Rightarrow \Phi_E = EA\cos(\theta)$
- La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico
 \vec{E} y \vec{A} son perpendiculares; $\Rightarrow \Phi_E = 0$

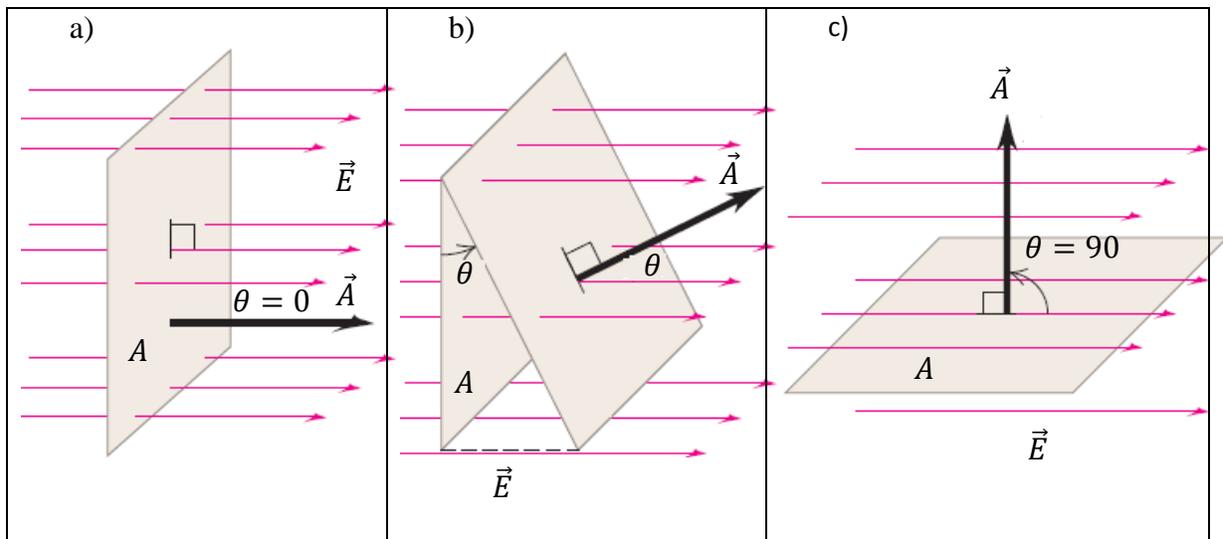


Figura 2.2 Una superficie plana en un campo eléctrico uniforme.

Ejemplo 2.1 Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco con radio de $R = 0.10m$ se orienta con su vector unitario normal con un ángulo de 30° respecto de un campo eléctrico uniforme con magnitud de $2.0 * 10^3 N/C$ (figura). (Como ésta no es una superficie cerrada, no tiene un “interior” ni un “exterior”; por eso se tiene que especificar la dirección \hat{n} de en la figura.) a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? b) ¿Cuál sería el flujo que cruzaría el disco si se girara de manera que su normal fuera perpendicular a \vec{E} ? c) ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si su normal fuera paralela a \vec{E} ?

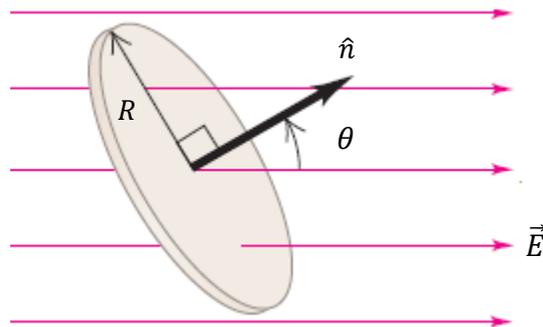


Figura 2.3 El flujo eléctrico Φ_E a través de un disco depende del ángulo entre su normal \hat{n} y el campo eléctrico \vec{E} .

Planteamiento: Este problema corresponde a una superficie plana en un campo eléctrico uniforme. La orientación del disco es como la del rectángulo en la figura m

- a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco?

$$\Phi_E = EA \cos(\theta)$$

El área del disco es

$$A = \pi R^2 = 3.14(0.10m)^2 \Rightarrow A = 0.0314m^2$$

El ángulo entre el vector normal \hat{n} y el campo eléctrico \vec{E} es $\theta = 30^\circ$. El flujo es

$$\Phi_E = 2.0 * 10^3 N/C \times 0.0314m^2 \cos(30) \Rightarrow \Phi_E = 54 \frac{Nm^2}{C}$$

- b) ¿Cuál sería el flujo que cruzaría el disco si se girara de manera que su normal fuera perpendicular a \vec{E} ?

En este caso, el ángulo entre el vector normal \hat{n} y el campo eléctrico sería $\theta = 90^\circ$, y el $\cos(90^\circ) = 0$, lo que implica que a través del disco no hay flujo.

- c) ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si su normal fuera paralela a \vec{E} ?

Ahora, el ángulo entre el vector normal \hat{n} y el campo eléctrico sería $\theta = 0^\circ$, y el $\cos(0^\circ) = 1$, lo que implica que a través del disco hay flujo máximo, esto es

$$\Phi_E = 2.0 * 10^3 \text{ N/C} \times 0.0314 \text{ m}^2 \Rightarrow \Phi_E = 63 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$$

Ejemplo 2.2 Flujo eléctrico a través de un cubo

Un cubo de arista L está situado en una región de campo eléctrico uniforme \vec{E} . Determine el flujo eléctrico que pasa a través de cada cara del cubo y el flujo total a través de éste cuando a) el cubo está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo \vec{E} como se ilustra en la figura 1.23a ; y b) cuando el cubo se gira un ángulo θ , como en la figura 1.23b.

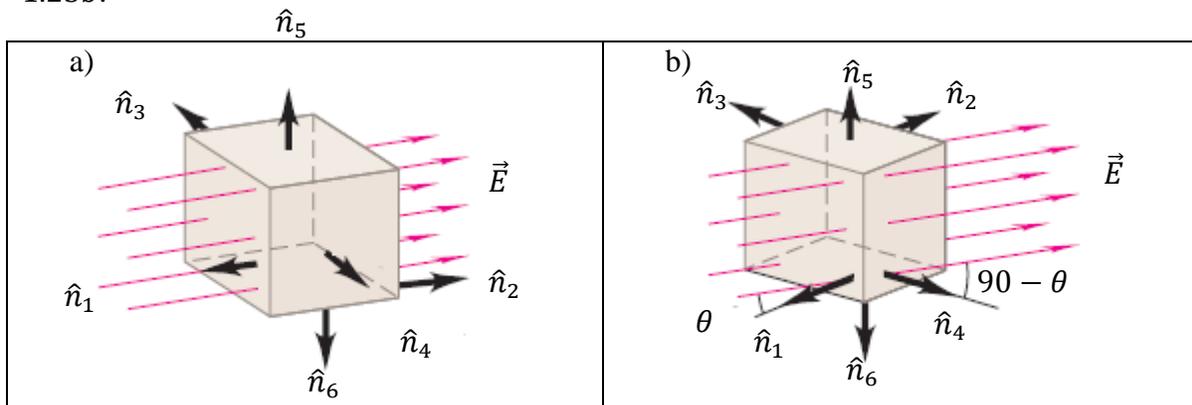


Figura 2.4 Flujo eléctrico de un campo uniforme \vec{E} a través de una caja cúbica con arista L en dos orientaciones.

Planteamiento: En este problema se va a determinar el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo y el flujo total (la suma de los flujos que pasan por las seis caras).

a) El cubo está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo \vec{E}

En la figura se ilustran los vectores unitarios para cada cara ($\hat{n}_1 \dots \hat{n}_6$); la dirección de cada vector unitario es hacia fuera desde la superficie cerrada del cubo.

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_1 es de $180^\circ \Rightarrow \Phi_{E_1} = \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EA \cos(180^\circ) \Rightarrow \Phi_E = -EL^2$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_2 es de $0^\circ \Rightarrow \Phi_{E_2} = \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = EA \cos(0^\circ) \Rightarrow \Phi_E = EL^2$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_3 es de 90° ; $\Rightarrow \Phi_{E_3} = \vec{E} \cdot \hat{n}_3 A = EA \cos(90^\circ) \Rightarrow \Phi_E = 0$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_4 es de 90° ; $\Rightarrow \Phi_{E_4} = \vec{E} \cdot \hat{n}_4 A = EA \cos(90^\circ) \Rightarrow \Phi_E = 0$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_5 es de 90° ; $\Rightarrow \Phi_{E_5} = \vec{E} \cdot \hat{n}_5 A = EA \cos(90^\circ) \Rightarrow \Phi_E = 0$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_6 es de 90° ; $\Rightarrow \Phi_{E_6} = \vec{E} \cdot \hat{n}_6 A = EA \cos(90^\circ) \Rightarrow \Phi_E = 0$

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} + \Phi_{E_3} + \Phi_{E_4} + \Phi_{E_5} + \Phi_{E_6}$$

$$\Phi_E = -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

b) Cuando el cubo se gira un ángulo θ , como en la Figura 2.4b

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_1 y es $\theta \Rightarrow \Phi_{E_1} = \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EA \cos(180 - \theta) \Rightarrow \Phi_E = -EL^2 \cos(\theta)$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_2 es de $\theta \Rightarrow \Phi_{E_2} = \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = EA \cos(\theta) \Rightarrow \Phi_E = EL^2 \cos(\theta)$

El \sphericalangle entre \vec{E} y \hat{n}_3 es $90^\circ + \theta$; $\Rightarrow \Phi_{E_3} = \vec{E} \cdot \hat{n}_3 A = EA \cos(90^\circ + \theta) \Rightarrow \Phi_E = -EL^2 \cos(\theta)$

El \sphericalangle entre \vec{E} y \hat{n}_4 es $90^\circ - \theta$; $\Rightarrow \Phi_{E_4} = \vec{E} \cdot \hat{n}_4 A = EA \cos(90^\circ - \theta) \Rightarrow \Phi_E = +EL^2 \cos(\theta)$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_5 es de 90° ; $\Rightarrow \Phi_{E_5} = \vec{E} \cdot \hat{n}_5 A = EA \cos(90^\circ) \Rightarrow \Phi_E = 0$

El ángulo entre \vec{E} y \hat{n}_6 es de 90° ; $\Rightarrow \Phi_{E_6} = \vec{E} \cdot \hat{n}_6 A = EA \cos(90^\circ) \Rightarrow \Phi_E = 0$

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} + \Phi_{E_3} + \Phi_{E_4} + \Phi_{E_5} + \Phi_{E_6}$$

$$\Phi_E = -EL^2 \cos(\theta) + EL^2 \cos(\theta) - EL^2 \cos(\theta) + EL^2 \cos(\theta) + 0 + 0 = 0$$

El flujo total través de la superficie del cubo es, de nuevo, igual a cero.

2. 2 Flujo de un campo eléctrico no uniforme

Aquí se divide el área A en muchos elementos pequeños dA , cada uno de los cuales tiene un vector unitario perpendicular a él, y un vector de área $\vec{A} = \hat{n}A$. (Figura 2.5)

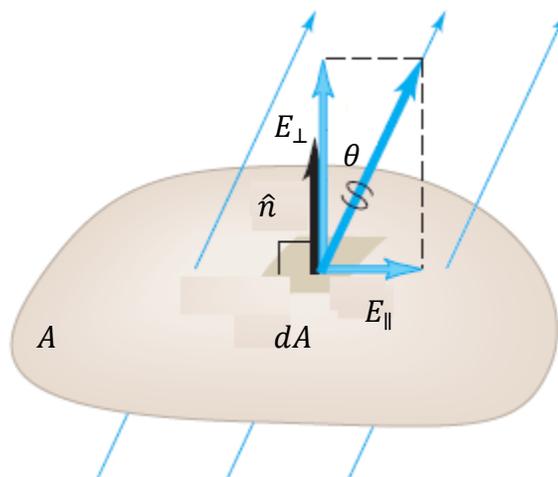


Figura 2.5 Flujo eléctrico en una superficie arbitraria y campo eléctrico no uniforme.

El flujo eléctrico se calcula a través de cada elemento y los resultados se integran para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \oint_S E dA \cos(\theta) = \oint_S E_{\perp} dA = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad 2.3$$

Esta integral se llama integral de superficie de la componente E_{\perp} en el área, o integral de superficie de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$.

2.4 Ley de Gauss

La ley de Gauss es una alternativa a la ley de Coulomb. Aunque equivale por completo a la ley de Coulomb, la ley de Gauss ofrece una forma distinta de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Esta ley la formuló Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Muchas áreas de las matemáticas llevan la marca de su influencia; Gauss también realizó contribuciones igualmente significativas en la física teórica.

Antes de establecer en que consiste la ley de Gauss, así como su definición Matemática, estudiemos algunos casos de flujos producidos por distribuciones discretas de cargas en superficies con ciertos tipos de simetría.

Carga puntual dentro de una superficie esférica

Consideremos el caso de una carga puntual $+q$. Envolvamos esta carga $+q$ por dos esferas, una de radio R , y luego por otra de radio $2R$, y luego determinemos el flujo eléctrico en cada caso (véase la figura 2.6).

Analicemos primeramente el caso de la carga $+q$, rodeada por la esfera de radio R . Observamos, que el campo eléctrico que produce la carga puntual, $+q$, en cualquier punto sobre la superficie de la esfera es \vec{E} , el cual por la definición de campo eléctrico para una carga puntual, ecuación (1.26) es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad 2.4$$

El vector \vec{E} va en dirección al vector \hat{r} , lo que quiere decir que la dirección del vector \vec{E} es radial. Entonces, el flujo eléctrico producido por \vec{E} , sobre el área dA de acuerdo a la ecuación (2.3) es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \hat{r} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E dA \hat{r} \cdot \hat{n} = EA$$

Donde A , es el área de la de la esfera igual a $4\pi R^2$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \times 4\pi R^2$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad 2.5$$

Analicemos ahora el caso de la carga $+q$, rodeada por la esfera de radio $2R$ (véase la figura 2.6). La situación es semejante a la estudiada anteriormente, entonces el flujo eléctrico sería,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$$

Donde el área de la de la esfera es $4\pi(2R)^2 = 4\pi(4R^2)$ y el campo eléctrico en la superficie de esta esfera es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(2R)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{4R^2}$$

Entonces

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{4R^2} 4\pi(4R^2)$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad 2.6$$

De acuerdo a los resultados obtenidos, ecuaciones (2.5) (2.6)

El flujo eléctrico es independiente del radio R de la esfera; sólo depende de la carga q encerrada por la esfera.

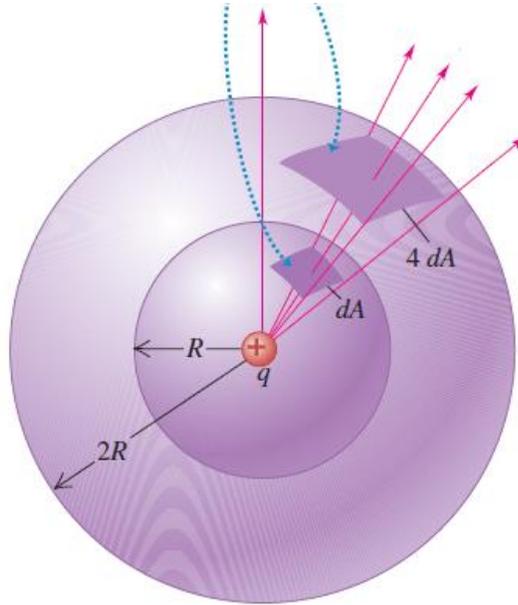


Figura 2.6 Proyección de un elemento de área dA de una esfera de radio R sobre una esfera concéntrica de radio $2R$. La proyección multiplica las dimensiones lineales por 2, por lo que el elemento de área sobre la esfera más grande es $4dA$.

Carga puntual dentro de una superficie no esférica

Sea una esfera de radio R circundada por una superficie de forma irregular, en vez de por una segunda esfera (Figura 2.7a). Procedamos a dividir la superficie irregular en elementos dA , calcular para cada uno de ellos el flujo eléctrico según la ecuación (2.2), y sumar los resultados por integración, Esto es,

$$\Phi_E = \oint_S E dA \cos(\theta) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Recordemos que el campo eléctrico producido por una carga puntual en cualquier punto, viene dado por la ecuación (2.4). Entonces,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} dA$$

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} |\hat{r}| |\hat{n}| dA \cos(\theta)$$

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dA \cos(\theta)}{r^2}$$

donde

$$\frac{dA \cos(\theta)}{r^2} = d\Omega \quad 2.8$$

es el ángulo sólido subtendido por el elemento de superficie dA , visto desde la carga q . Es importante recordar que, el ángulo sólido, $d\Omega$, calculado alrededor de un punto, es 4π . Entonces, tenemos que

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega \Rightarrow \Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad 2.9$$

El resultado obtenido es idéntico al encontrado anteriormente, ecuaciones (2.5) y (2.6). Podemos decir que la ecuación (2.9), siempre se cumple para una superficie de cualquier forma o tamaño, siempre y cuando sea una superficie cerrada que contenga la carga q .

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie.

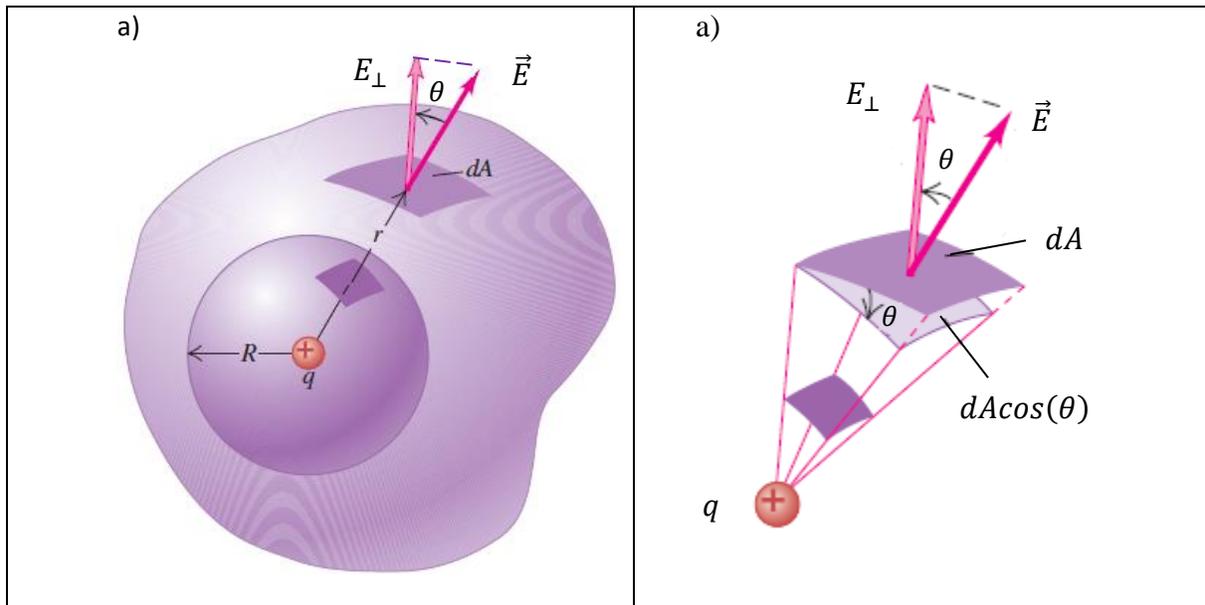


Figura 2.7 Cálculo del flujo eléctrico que pasa a través de una superficie no esférica. a) La componente normal del campo eléctrico E_{\perp} apunta hacia fuera con respecto a la superficie A formando un ángulo θ con la dirección de \vec{E} . b) La proyección del elemento de área dA sobre la superficie esférica es $dA \cos(\theta)$.

En el caso de, donde la superficie cerrada no encierra ninguna carga, el flujo es nulo

$$\Phi_E = \oint_S E dA \cos(\theta) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad 2.10$$

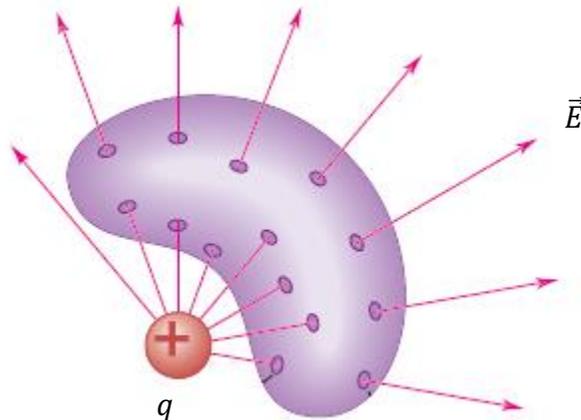


Figura 2.8 Carga puntual afuera de una superficie cerrada que no encierra ninguna carga. Si una línea de campo eléctrico proveniente de la carga externa entra por un punto de la superficie, debe salir por otro.

2.5 Forma general de la ley de Gauss

Ahora viene el paso final en la obtención de la forma general de la ley de Gauss. Suponga que la superficie encierra no sólo una carga puntual q , sino varias cargas, q_1, q_2, q_3, \dots . El campo eléctrico total (resultante) \vec{E} en cualquier punto es la suma vectorial de los campos de las cargas individuales. Sea Q_{enc} la carga total encerrada por la superficie $Q_{enc} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$. Sea también \vec{E} el campo total en la posición del elemento de área de la superficie $d\vec{A}$, y sea E_{\perp} su componente perpendicular al plano de ese elemento (es decir, paralelo a $d\vec{A}$). Luego, se puede escribir una ecuación como ecuación (1.36) para cada carga y su campo correspondiente y luego sumar los resultados. Al hacerlo se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint_S E dA \cos(\theta) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad 2.11$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0 .

Superficies gaussianas

Recuerde que la superficie cerrada a que se refiere la ley de Gauss es imaginaria; no es necesario que haya un objeto material en la posición de la superficie. A menudo se hace referencia a la superficie cerrada que se menciona en la ley de Gauss como superficie gaussiana. Como ejemplo, en la figura a se muestra una superficie gaussiana de radio r alrededor de una carga puntual positiva $+q$

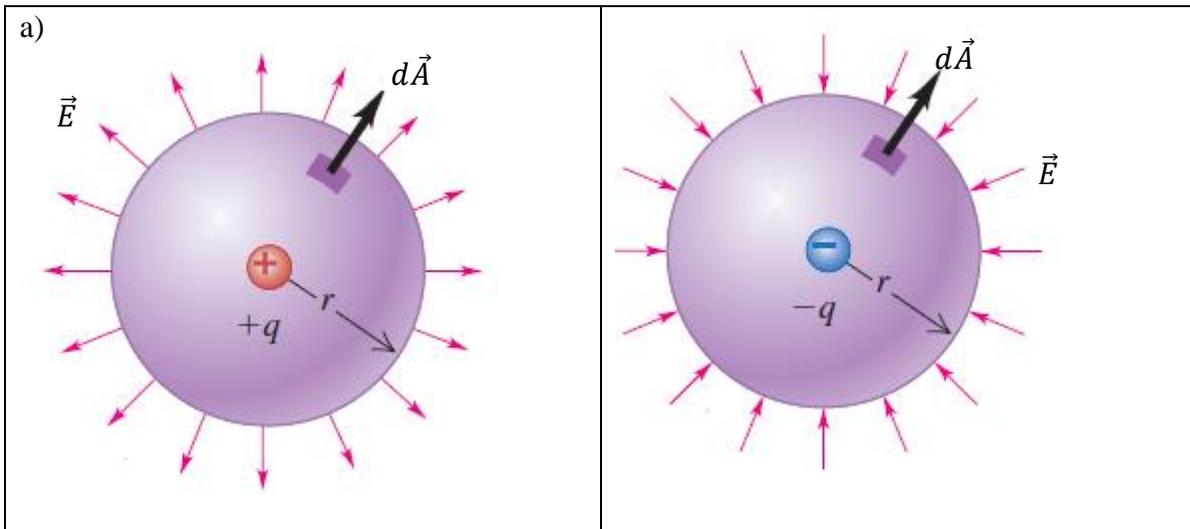


Figura 2.9 Superficies gaussianas esféricas alrededor de a) una carga puntual positiva y b) una carga puntual negativa.

El flujo eléctrico producido por la carga $+q$ sobre la superficie gaussiana de radio r es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \hat{r} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E dA \hat{r} \cdot \hat{n} = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2$$

$$\Phi_E = +\frac{q}{\epsilon_0} \quad 2.12$$

El flujo eléctrico producido por la carga $-q$ sobre la superficie gaussiana de radio r es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \hat{r} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E dA \hat{r} \cdot \hat{n} = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r^2} \times 4\pi r^2$$

$$\Phi_E = -\frac{q}{\epsilon_0} \quad 2.13$$

Esto de nuevo concuerda con la ley de Gauss porque la carga encerrada en la figura 1.28b es $Q_{enc} = -q$

En conclusión, la ley de Gauss ofrece una relación entre el campo eléctrico en una superficie cerrada y la distribución de carga dentro de esa superficie, permitiendo tener información acerca del campo eléctrico que esa distribución genera.

Ejemplo 2.3 Campo eléctrico de una esfera conductora con carga

Se coloca una carga positiva q en una esfera conductora sólida de radio R (figura 2.10a). Determine E en cualquier punto en el interior o en el exterior de la esfera.

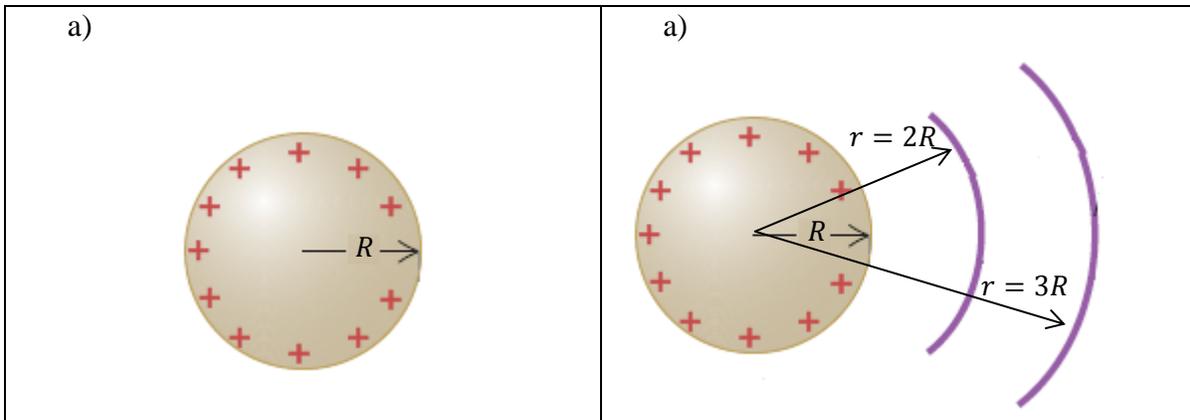


Figura 2.10 a) Esfera conductora. b) Superficies gaussianas (Color morado) a distancias $r > R$.

Planteamiento: Como se vio previamente, en un conductor toda la carga debe encontrarse en la superficie. En este caso toda la carga está en la superficie de la esfera.

a) Campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera $r > R$

En primer lugar se considera el campo fuera del conductor, por lo que se elige $r > R$ (Figura 2.10b). Todo el conductor se encuentra dentro de la superficie gaussiana, de manera que la carga encerrada es q .

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \hat{r} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E dA \hat{r} \cdot \hat{n} = EA$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \tag{2.14}$$

Esta expresión del campo en cualquier punto afuera de la esfera ($r > R$) es la misma para una carga puntual; el campo debido a la esfera con carga es equivalente al que habría si toda la carga estuviera concentrada en su centro. Si consideramos, el campo en la superficie de la esfera, es decir en $r = R$, resulta

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \quad 2.15$$

b) **Campo eléctrico en puntos interiores a la esfera $r < R$**

Por ultimo para determinar el campo eléctrico dentro del conductor, se usa una superficie gaussiana esférica con radio $r < R$. De nuevo, la simetría esférica dice

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Pero, como toda la carga esta concentrada o distribuida en la superficie de la esfera,

$$Q_{enc} = 0$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = 0 \quad 2.16$$

En la figura 2.11, se muestra el campo en el interior, superficie y exterior de la esfera.

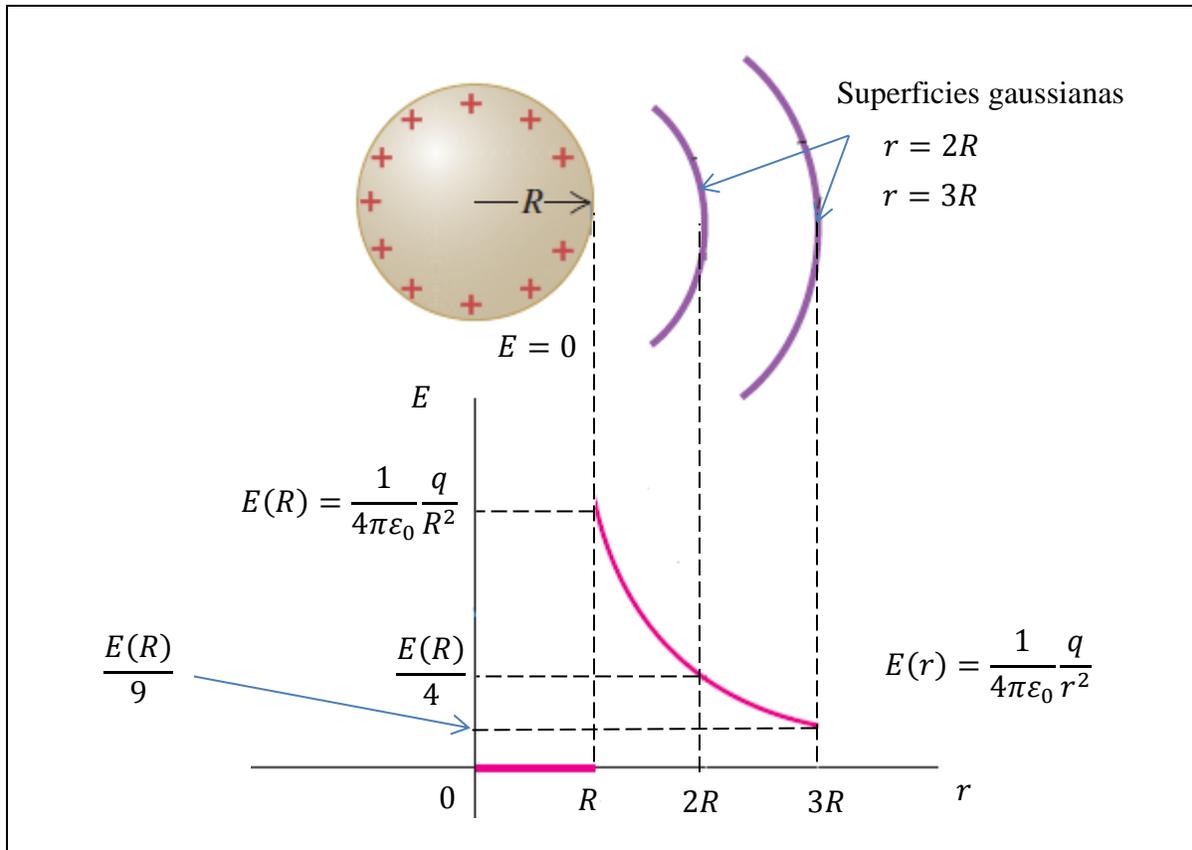


Figura 2.11 Cálculo del campo eléctrico de una esfera conductora con carga positiva q . Fuera de la esfera, el campo es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera.

Ejemplo 2.4 Campo eléctrico de una esfera con carga uniforme

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme en todo el volumen de una esfera aislante con radio R (Figura 2.12a). Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el punto P a una distancia r del centro de la esfera.

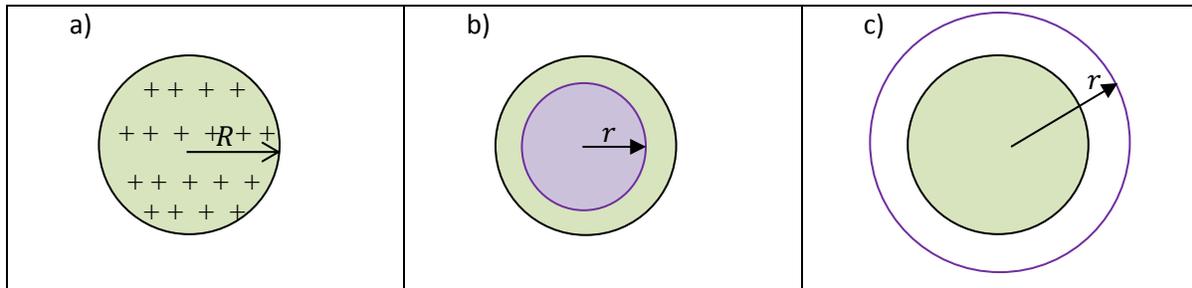


Figura 2.12 Campo eléctrico de una esfera con carga uniforme. a) Esfera con carga uniforme, b) Superficie gaussiana (Color morado) con $r < R$, c) Superficie gaussiana (Color morado) con $r > R$

Planteamiento: Para emplear la simetría se elige como superficie gaussiana una esfera con radio r , concéntrica con la distribución de la carga, figura 2.12b

Por simetría, la magnitud \vec{E} del campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana, y la dirección de es radial en cada uno de ellos, por lo que $E = E_{\perp}$.

Así, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es el producto de E por el área total de la superficie $A = 4\pi r^2$, es decir, $E(4\pi r^2) = \Phi_E$. La cantidad de carga encerrada por la superficie gaussiana depende del radio r .

a) Campo eléctrico en puntos interiores a la esfera $r < R$

En primer lugar se considera el campo fuera del conductor, por lo que se elige $r < R$. La densidad volumétrica de carga ρ es

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

El volumen V_{enc} encerrado por la superficie gaussiana es

$$V_{enc} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Entonces, la cantidad de carga encerrada por la superficie gaussiana es

$$Q_{enc} = \rho V_{env} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$Q_{enc} = Q \frac{r^3}{R^3} \quad 2.17$$

Entonces,

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad 2.18$$

La magnitud del campo es proporcional a la distancia r que hay entre el punto del campo y el centro de la esfera.

b) **Campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera** $r > R$

Para calcular la magnitud del campo fuera de la esfera con carga se utiliza una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$. Esta superficie encierra la totalidad de la esfera con carga, por lo que

$$Q_{enc} = Q$$
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad 2.19$$

Para cualquier cuerpo esférico simétrico con carga, el campo eléctrico en su exterior es el mismo que si todo el cuerpo estuviera concentrado en el centro.

La figura 2.13 presenta una gráfica de E como función de r para este problema.

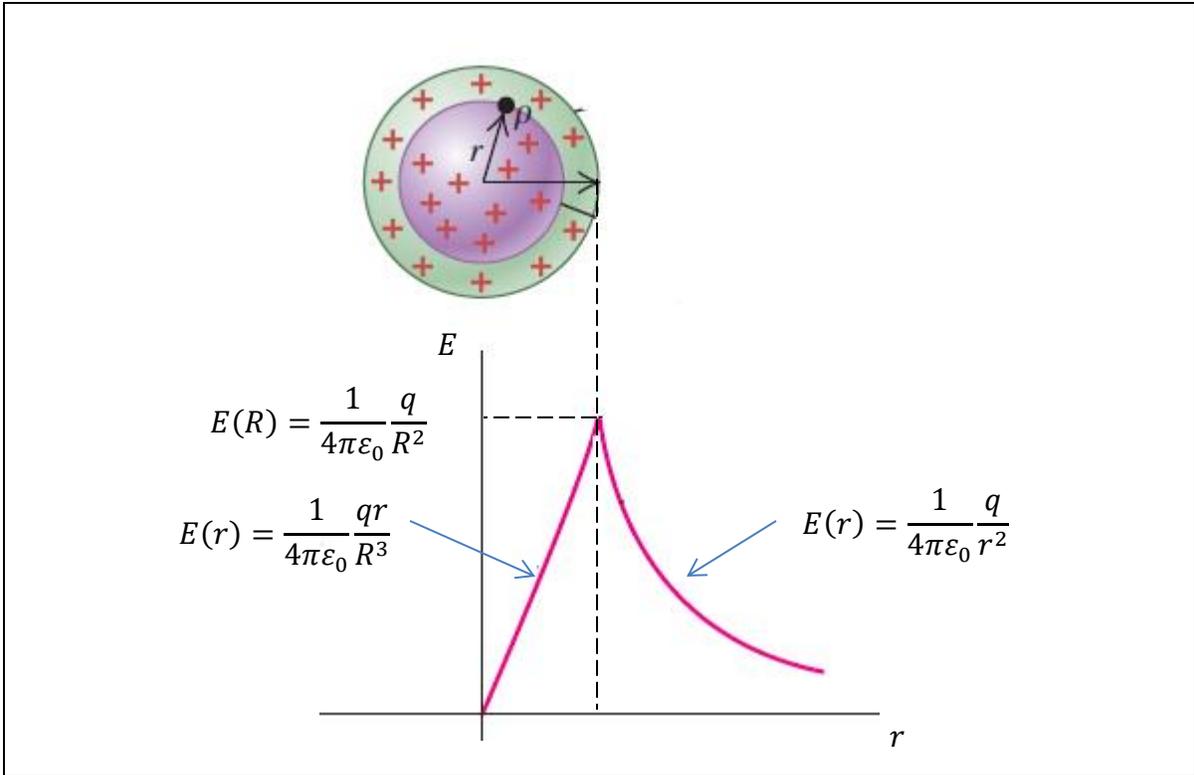


Figura 2.13 Magnitud del campo eléctrico de una esfera aislante con carga uniforme.

Ejemplo 2.5 Campo eléctrico de un filamento con carga uniforme

Simetría cilíndrica

Entre las distribuciones de carga con simetría cilíndrica están las líneas infinitamente largas, las barras (cilindros macizos), los tubos (cascarones cilíndricos), etc. y las capas concéntricas de estos objetos.

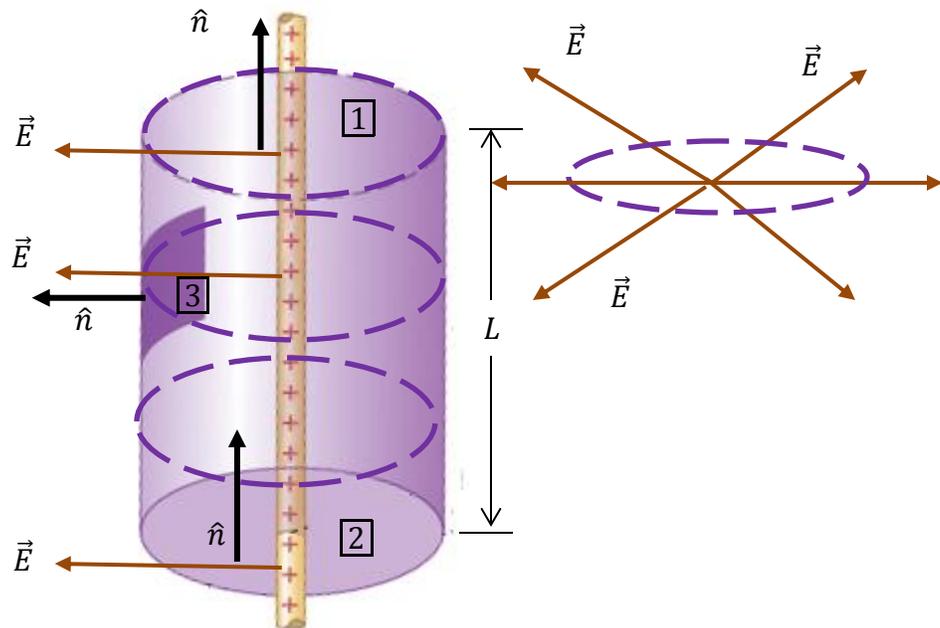


Figura 2.14 Un filamento muy largo con una distribución uniforme de carga positiva. Las líneas de campo son radiales hacia afuera, y están uniformemente distribuidas a lo largo del hilo (naranja). Una superficie imaginaria (morada) de Gauss rodea al filamento.

Planteamiento: Para problemas con simetría cilíndrica se toma, como superficie de Gauss, una superficie cilíndrica de radio r (donde se quiere conocer E) y alguna longitud L arbitraria. La superficie cilíndrica cerrada se compone de dos círculos, tapa **1** y fondo **2** y un lado curvo **3**. Como el campo eléctrico es radial, es paralelo a las superficies circulares de tapa y fondo, por lo que esas superficies aportan cero al flujo neto.

El flujo total es

$$\Phi_T = \oint_{Total} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{Total} E dA$$

$$\Phi_T = \oint_{\text{Tapas}\text{[1]}} E_{\perp} dA + \oint_{\text{fondo}\text{[2]}} E_{\perp} dA + \oint_{\text{Lado}\text{[3]}} E_{\perp} dA$$

$$\Phi_T = 0 + 0 + E_{\perp} A = E_{\perp} (2\pi r L)$$

De Acuerdo a la ley de Gauss

$$\Phi_T = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Donde la carga encerrada por la superficie Gaussiana es (el problema nos da es carga por unidad de longitud)

$$Q_{enc} = \lambda L$$

Entonces,

$$E_{\perp} (2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad 2.20$$

Se observa que la misma ecuación es válida para cualquier distribución de carga con simetría cilíndrica, siempre que λ represente la carga total por unida de longitud en el interior de un cilindro de radio r , en cuya superficie se quiere conocer el valor de E . Así se llega a otro resultado general: El campo eléctrico en el radio r , debido a cualquier distribución de carga con simetría c cilíndrica, es igual al que se produce cuando toda la carga dentro del cilindro de radio r está concentrada en una línea de carga a lo largo del eje.

Ejemplo 2.6 Campo eléctrico de un cascaron cilíndrico

Un cascaron aislante grueso, cilíndrico, con radio interior a y radio exterior b tiene una carga distribuida en su volumen, con densidad uniforme de carga volumétrica ρ , como se ve en la figura 2.15a. Determine el campo eléctrico en las tres regiones: a) $r \leq a$, b) $a \leq r \leq b$ y c) $r \geq b$

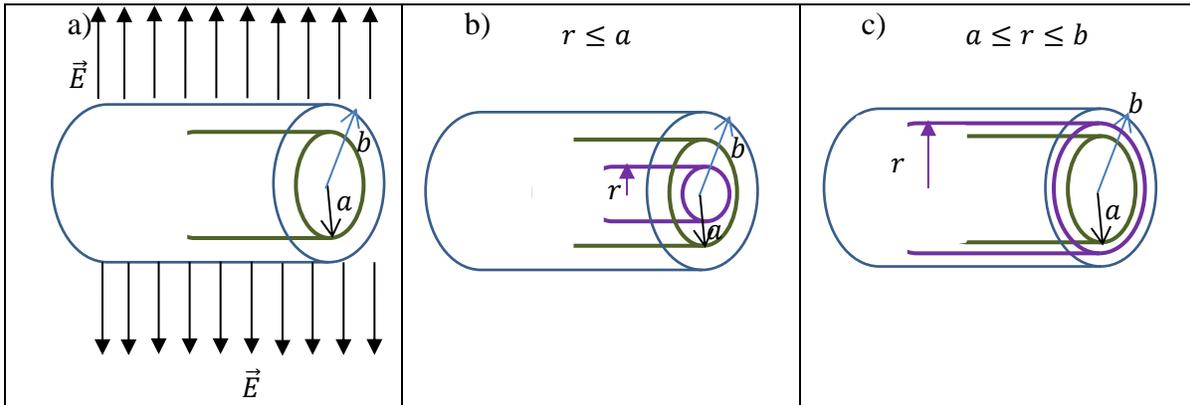


Figura 2.15 a) Un cascaron cilíndrico infinito (azul) con radio interior a y radio exterior b , con una distribución volumétrica uniforme de carga positiva. Las líneas de campo se dirigen radialmente hacia afuera. Para determinar el campo eléctrico a distintos radio, se establecen superficies gaussianas cilíndricas (morada) de diferentes radios. b) $r < a$, c) $a \leq r \leq b$.

Planteamiento: El campo eléctrico como se describió en el problema anterior es radial y de magnitud constante, para cualquier radio dado r . Así, la Ley de Gauss, simetría cilíndrica, siempre es

$$E \times (2\pi rL) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

- a) $r \leq a$. La superficie Gaussiana no encierra cargas (Figura 2.15b). Así, $Q_{enc} = 0$, por tanto la Ley de Gauss

$$E \times (2\pi rL) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$E = 0$$

2.21

- b) $a \leq r \leq b$. Considérese una superficie gaussiana cilíndrica, con su lado curvo dentro del cascarón, como en la figura 2.15c. En función de la densidad volumétrica de carga, ρ ,

$$Q_{int} = \rho V_{int}$$

Para calcular V_{int} solo se debe incluir el volumen que realmente contenga carga (y que esté dentro del radio r). El volumen de la superficie Gaussiana es πr^2 , de sus extremos, por su longitud L ; si se resta el volumen que está vacío, entonces

$$V_{int} = \pi r^2 L - \pi a^2 L = \pi L(r^2 - a^2)$$

$$Q_{int} = \rho \pi L(r^2 - a^2)$$

Aplicando la ley de Gauss

$$E \times (2\pi r L) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi L(r^2 - a^2)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\frac{\rho \pi L(r^2 - a^2)}{\epsilon_0}}{2\pi r L} = \frac{\rho \pi L(r^2 - a^2)}{2\pi \epsilon_0 r L} = \frac{\rho(r^2 - a^2)}{2r \epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \quad 2.22$$

- c) $r \geq b$. En este caso la superficie Gaussiana esta fuera del cascarón (Figura 2.15d). La carga interior se obtiene usando sólo el volumen que contiene la carga (es el volumen del cascaron cargado, porque se excluye el volumen vacío dentro y fuera del cascarón):

$$Q_{int} = \rho V_{int}$$

$$V_{int} = \pi b^2 L - \pi a^2 L = \pi L(b^2 - a^2)$$

$$Q_{int} = \rho \pi L(b^2 - a^2)$$

Aplicando la ley de Gauss

$$E \times (2\pi r L) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi L(b^2 - a^2)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\frac{\rho \pi L(b^2 - a^2)}{\epsilon_0}}{2\pi r L} = \frac{\rho \pi L(b^2 - a^2)}{2\pi \epsilon_0 r L} = \frac{\rho(b^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{\rho(b^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r} \quad 2.23$$

Nótese la dependencia de $\frac{1}{r}$ de este campo eléctrico fuera de la distribución de carga con simetría cilíndrica. En realidad, la ecuación (2.22) es idéntica al resultado del filamento

de longitud infinita, $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$, pero ahora la carga por unidad de longitud es la carga por unidad de volumen multiplicada por el área transversal del cascarón, $\lambda = \rho(\pi b^2 - \pi a^2)$

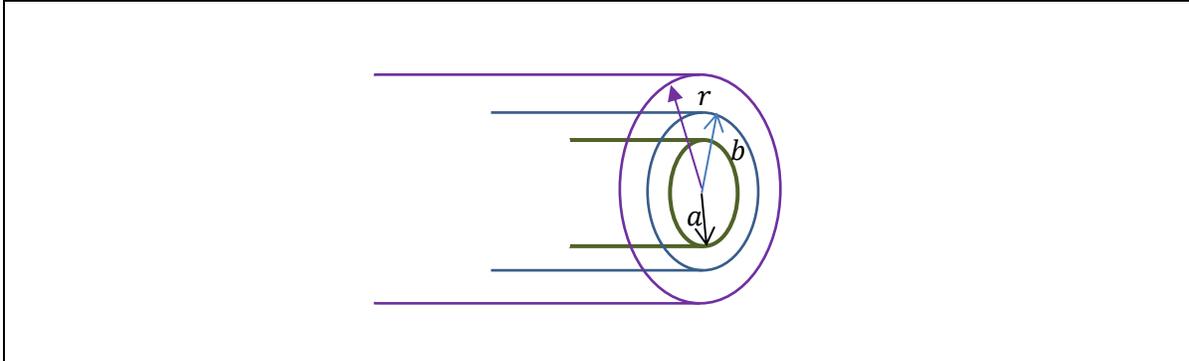


Figura 2.15d. Campo eléctrico en puntos externos al cascarón cilíndrico, la superficie gaussiana (morado) corresponde al caso de $r > b$.

Ejemplo 2.7 Campo eléctrico de una lámina con carga uniforme

Entre las distribuciones de carga con simetría plana están las láminas y las placas infinitas de carga, y las capas simétricas de esas láminas o placas.

Aplicando la ley de Gauss, determine el campo eléctrico de una lámina muy grande y uniforme de carga, con s coulombios por metro cuadrado.

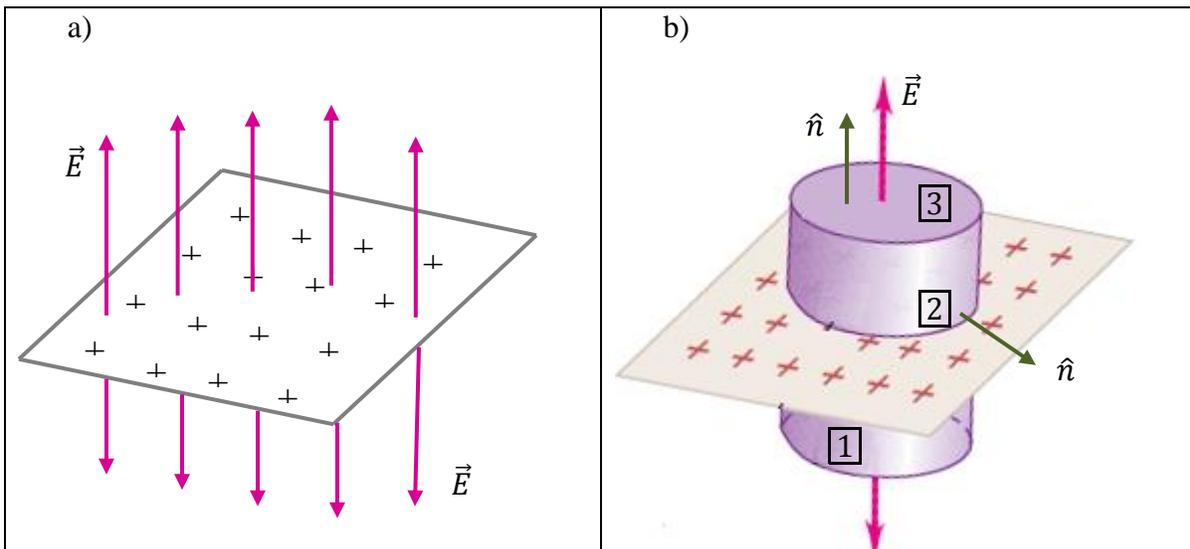


Figura 2.16 a) Una lámina muy grande de carga positiva distribuida uniformemente. Las líneas de campo están uniformemente distribuidas. b) Una superficie cilíndrica Gaussiana, el área de cada extremo es A .

Planteamiento: La simetría indica que el campo eléctrico siempre es perpendicular a la lámina de carga, y que su magnitud es constante sobre cualquier superficie determinada que sea paralela a la lámina (véase figura 2.16a). Definiremos una superficie Gaussiana con la forma de un cilindro con base de área A que se prolonga simétricamente a cada lado de la lámina de carga (véase figura 2.16b). En esa geometría el campo eléctrico es paralelo a la superficie curva del cilindro, y allí no corta flujo alguno. En cada uno de los dos extremos circulares, el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, y entonces el flujo a través de cada extremo es EA . El flujo total es

$$\Phi_T = \oint_{Total} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{Total} E dA$$

$$\Phi_T = \oint_{fondo\textcircled{1}} E_{\perp} dA + \oint_{lado\ curvo\textcircled{2}} E_{\perp} dA + \oint_{tapa\textcircled{3}} E_{\perp} dA$$

$$\Phi_T = EA + 0 + EA = 2EA$$

y entonces la ley de Gauss para esta geometría plana viene a ser

$$\Phi_T = \oint_{Total} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La cantidad de carga en el interior de la superficie Gaussiana es la carga por unidad de área multiplicada por el área de la lámina encerrada por la superficie, es decir,

$$Q_{enc} = \sigma A$$

Entonces, la ley de Gauss resulta en

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad 2.24$$

Comentarios: En esta geometría se pudo haber empleado una caja cúbica o rectangular como superficie Gaussiana, en lugar de un cilindro. La forma de los extremos es irrelevante; las propiedades esenciales de la superficie Gaussiana son que sus extremos deben ser paralelos a la lámina, que la superficie que la rodea debe ser perpendicular a la lámina y que debe ser simétrica en ambos lados de la lámina.

Para cada tipo de simetría es útil recordar el comportamiento del campo eléctrico fuera de la distribución de carga:

$$\text{Esférica, } E \propto \frac{1}{r^2}; \text{ Cilíndrica, } E \propto \frac{1}{r} \text{ y plana } E \propto \textit{constante}$$