3 Potencial eléctrico

3.1 Introducción

Anteriormente vimos que si una fuerza es conservativa, el trabajo que efectúa sobre una partícula durante un desplazamiento se puede expresar como una diferencia entre dos energías potenciales: una para el punto de partida y otra para el punto de llegada del desplazamiento. Si se conoce la energía potencial que corresponde a la fuerza, de inmediato se podrá conocer la conservación de la energía mecánica, que no es más que la suma dela energía cinética y la energía potencial.

La fuerza eléctrica que ejerce una distribución estática de cargas sobre una carga puntual es una fuerza conservativa. Para verificar esta afirmación, consideremos dos placas con cargas iguales en magnitud y signo contrario

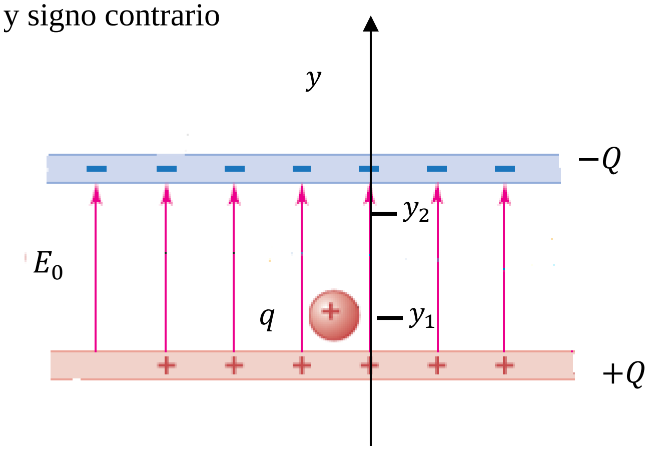

Figura 3.1 Campo eléctrico uniforme en el espacio entre dos placas paralelas con carga

Como demostramos, entre las placas existe un campo eléctrico uniforme, E_0, En este sentido, la fuerza que ejerce este campo eléctrico sobre una carga puntual q es,

$$F = qE_0$$

y el trabajo efectuado por esta fuerza constante durante un desplazamiento del punto y_1 al punto y_2, como se muestra en la figura 3.1, queda determinado por

$$W = F\Delta y = F(y_2 - y_1) = qE_0(y_2 - y_1)$$

$$W = qE_0y_2 - qE_0y_1$$

Si definimos

$$U = -qE_0y \tag{3.1}$$

Entonces

$$W = qE_0y_2 - qE_0y_1 = -qE_0y_1 + qE_0y_2 = U_1 - U_2$$

Para una carga positiva en un campo eléctrico con dirección vertical hacia arriba, la energía potencial decrece con la altura.

$$U = -qE_0y$$

Obsérvese que la energía potencial, es directamente proporcional a la distancia y desde la placa inferior, como se observa en la figura 3.1.

La conservación de la energía mecánica es la suma de la energía cineteca y la energía potencial

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - qE_0y = constante \tag{3.2}$$

La proporcionalidad directa entre la energía potencial y la altura recuerda la energía potencial gravitacional, mgy. Matematicamente, estas energías potencial eléctrica y potencial gravitacional se parecen, porque ambas implican una fuerza constante. Pero nótese que los signos de esas dos energías potenciales son opuestos, porque la fuerza eléctrica que ejercen las placas de la figura sobre una carga positiva q es hacia arriba, mientras que la fuerza gravitacional es hacia abajo. Los signos de las dos energías serían iguales si el campo eléctrico de la figura 3.1 fuera hacia abajo, o si la carga q fuera negativa. Por otro lado, se debe tomar en cuenta las implicaciones físicas de los cambios de energía potencial: por ejemplo, para que una carga positiva se mueva contra el campo eléctrico (esto es, hacia una posición de mayor energía potencial), la carga debe ser empujada por un agente externo (que efectúa trabajo) o bien, debe perder algo de energía cinética.

Resulta que es útil definir el campo eléctrico como la fuerza eléctrica dividida entre la carga q sobre la que actúa ese campo. De igual modo se verá que es útil definir el potencial electrostático V como la energía potencial eléctrica U dividida entre la carga q:

$$V = \frac{U}{q} \tag{3.3}$$

Así, el potencial electrostático es la energía potencial por unidad de carga.

En el sistema *SI*, el potencial eléctrico se mide en una unidad de energía, entre una unidad de carga, llamado Voltio. El producto de la carga elemental por la unidad de potencial, $e \times V$ o eV es una unidad de energía. Esta unidad de energía se llama electrón-voltio.

$$1eV = 1.6 * 10^{-19}C \times 1V = 1.6 * 10^{-19}J$$

Consideremos el caso de un campo eléctrico uniforme E_0 con energía potencial $U = -qE_0y$. El potencial electrostático es

$$V = -E_0y$$

La figura 3.2, se muestra una gráfica de este tipo de potencial lineal en función del desplazamiento y en la dirección del campo uniforme.

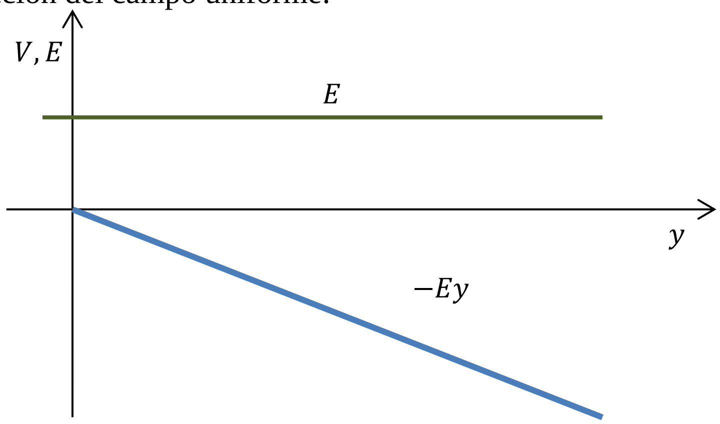

Figura 3.2 Potencial electrostático entre un par de láminas con carga opuesta, en función de la distancia a la lámina positiva

El potencial decrece en forma lineal con la distancia, en dirección del campo. Debido al signo negativo, El campo eléctrico se orienta hacia los potenciales decrecientes.

Tomado en cuenta la definición de energía potencial de un sistema de dos cargas puntuales, ecuación (3.3), el potencial eléctrico se puede escribir como,

$$V = \frac{U}{q} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}}{q}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r} \qquad 3.4$$

La ecuación (3.4) se le conoce como potencial electrostático de una carga puntual, también llamado **potencial de Coulomb.** Donde q' es la carga, y r representa la distancia de la carga q al punto donde se quiere calcular el potencial eléctrico.

La energía mecánica de una carga puntual que se mueve en el campo eléctrico de otra carga puntual es la suma de la energía potencial y la cinética. La ley de la conservación de la energía para el movimiento de una carga puntual q en el campo eléctrico de una carga puntual q' fija tiene la forma

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + qV = cte \qquad 3.5$$

Esta energía permanece constante durante el movimiento. Es obvio que si el producto qq' es negativo (cargas opuestas, fuerza de Coulomb de atracción), entonces, de acuerdo a la ecuación (3.5), siempre que r aumente, v debe disminuir, y cuando r disminuya v debe aumentar. Cuando el producto de qq' es positivo (cargas iguales, fuerza de Coulomb de repulsión) r y v aumentan al mismo tiempo.

También se puede comprobar que la fuerza eléctrica que ejerce una carga puntual sobre otra es conservativa. La fuerza eléctrica que ejerce una carga puntual q' sobre otra carga puntual q es

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

Para calcular la energía potencial que corresponde a esa fuerza se comenzará calculando el trabajo efectuado cuando la carga q se mueve, por ejemplo desde la posición P_1 hasta la posición P_2, para así tratar de expresar ese trabajo como una diferencia de dos términos. En la figura 3.3, las posiciones P_1 y P_2 están a las distancias r_1 y r_2, respectivamente de la carga fija q'.

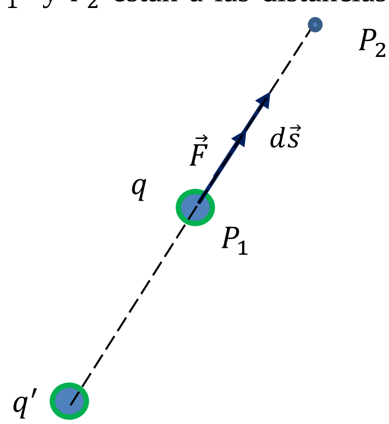

Figura 3.3 Dos puntos, P_1 y P_2, en el campo eléctrico de una carga q'. Los puntos que une a los puntos P_1 y P_2 es una recta radial.

El trabajo a lo largo de la trayectoria radial P_1 y P_2 es

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad 3.6$$

Como era de esperarse, este resultado demuestra que el trabajo es igual a la diferencia entre dos energías potenciales. En consecuencia, se puede identificar la energía potencial con

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} \qquad 3.7$$

Para dos cargas de igual signo, la energía potencial eléctrica es positiva, y disminuye en proporción inversa a la distancia. Una disminución de energía potencial con la distancia es característica de una fuerza de repulsión.

Para dos cargas de signos contrarios, la energía potencial eléctrica es negativa, y la magnitud de esa energía potencial negativa disminuye también en proporción inversa con la distancia (la energía potencial aumenta desde un valor negativo grande hasta cero). Ese aumento de energía con la distancia es característico de una fuerza de atracción.

La dependencia de la energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales de signo contrario, respecto a la distancia, es igual a la dependencia de la energía potencial gravitacional de dos puntos materiales (masas puntuales) respecto a la distancia, ambas son inversamente proporcionales a la distancia. Es lo que se esperaba, porque matemáticamente la fuerza eléctrica es similar a la fuerza gravitacional; ambas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

Para distribuciones que consisten en más de dos cargas, por ejemplo, q_1, q_2 y q_3 (véase figura 3.4), hay tres pares posibles:(q_1, q_2) , (q_2, q_3) , (q_1, q_3) la energía potencial neta del sistema es

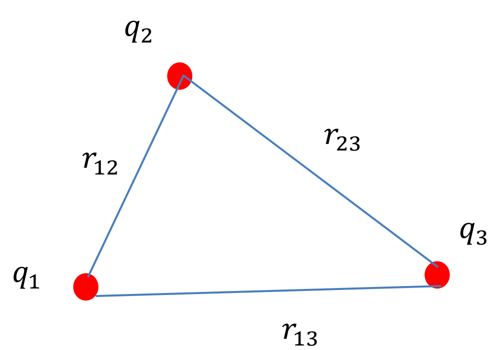

Figura 3.4 Sistema conformado por varias cargas (color rojo)

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right) \qquad 3.8$$

Donde r_{12}, r_{13} y r_{23} son las distancias indicadas en la figura 3.4.

Ejemplo 3.1 **Energía necesaria para formar un sistema de cuatro cargas**

Cuatro cargas, $q_1 = q$, $q_2 = 2q$, $q_3 = -q$ y $q_4 = q$ están en las esquinas de un cuadrado de lado a, como se ve en la figura. Si $q = 2\mu C$ y $a = 7.5cm$, ¿Cual fue la energía total necesaria para formar este sistema de cargas?

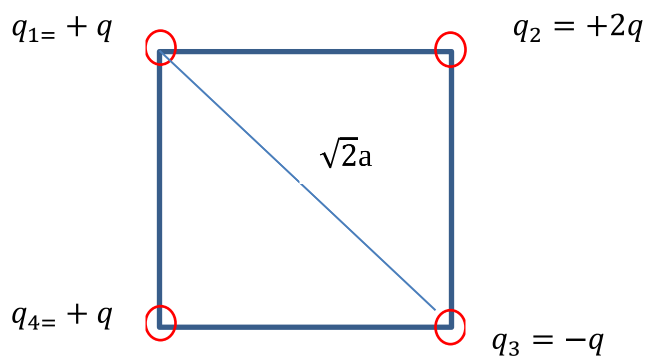

Figura 3.5 Cuatro cargas puntuales.

Planteamiento: Es una aplicación de la ecuación (3.8) de energía potencial para varias cargas. Para conocer la energía total se suman todas las energías potenciales de los pares individuales:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_1q_4}{r_{14}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \frac{q_3q_4}{r_{34}}\right)$$

Sustituyendo de acuerdo a los valores dados y mostrados en la figura, tenemos

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(+q)(+2q)}{a} + \frac{(+q)(-q)}{\sqrt{2}a} + \frac{(+2q)(-q)}{a} + \frac{(+q)(+q)}{a} + \frac{(+q)(+2q)}{\sqrt{2}a} + \frac{(-q)(+q)}{a}\right]$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2q^2}{a} + \frac{-q^2}{\sqrt{2}a} + \frac{-2q^2}{a} + \frac{q^2}{a} + \frac{2q^2}{\sqrt{2}a} + \frac{-q^2}{a}\right]$$

$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[2 + \frac{-1}{\sqrt{2}} - 2 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right] = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo por los valores numéricos dados

$$U = 9 * 10^9 \frac{N}{mC^2} \times \frac{(2 * 10^{-6}C)^2}{7.5 * 10^{-2}m}\frac{1}{1.4142} \qquad \Rightarrow U = 0.34J$$

3.2 Calculo del potencial a partir del campo eléctrico

Toda distribución arbitraria se puede considerar formada por muchas cargas puntuales. Como la fuerza eléctrica generada por una carga puntual estacionaria es conservativa, la fuerza eléctrica generada por esa distribución de cargas también debe ser una fuerza conservativa.

Cuando una carga puntual q se mueve desde una posición P_0 hasta una posición P en el campo eléctrico de una distribución de cargas, el trabajo efectuado por la fuerza eléctrica siempre se puede expresar como una diferencia de dos términos de energía potencial:

$$W = U_0 - U$$

$$W = \int_{P_0}^{P} \vec{F}.d\vec{r} = U_0 - U$$

$$\int_{P_0}^{P} q\vec{E}.d\vec{r} = qV_0 - qV$$

$$V = V_0 - \int_{P_0}^{P} \vec{E}.d\vec{r}$$

$$V = V_0 - \int_{P_0}^{P} Edscos(\theta) \qquad 3.9$$

Esta ecuación permite calcular el potencial electrostático de cualquier distribución arbitraria de cargas si se conoce el campo eléctrico. En ese cálculo se debe comenzar en alguna posición P_0 en la que el potencial tenga un valor dado V_0, y evaluar la integral para alguna trayectoria que una esa posición P_0 con la posición P. Aunque la elección del valor del potencial de referencia V_0 es arbitraria, lo convencional es, siempre que sea posible, adoptar el valor $V_0 = 0$ en el infinito como el potencial de Coulomb.

Anteriormente se calculó el potencial electrostático a partir del campo eléctrico. Ahora se verá como calcular el capo eléctrico a partir del potencial. Para este fin se comenzará con

$$V = V_0 - \int_{P_0}^{P} Edscos(\theta)$$

Supondremos, por el momento, que ds es un desplazamiento pequeño en dirección del campo eléctrico, Con $\theta = 0$, podemos escribir

$$V = V_0 - \int Eds \Rightarrow \int Eds = V_0 - V = -(V - V_0)$$

Si la integración sólo se hace sobre un intervalo pequeño, el campo eléctrico es aproximadamente constante, y el cambio de potencial $V - V_0 = dV$

Entonces

$$Eds = -dV$$

$$E = -\frac{dV}{ds} \qquad 3.10$$

Esto indica que el campo eléctrico es igual a la derivada negativa del potencial con respecto al desplazamiento.

Si el pequeño desplazamiento ds no es en la dirección del campo eléctrico, se debe conservar el factor $cos(\theta)$ en la ecuación, lo cual lleva a

$$Ecos(\theta) = -\frac{dV}{ds} \qquad 3.11$$

Como $Ecos(\theta)$ es la componente del campo eléctrico en la dirección del dsplazamiento, esta ecuación indica que la componente del campo eléctrico en cualquier dirección es igual a la derivada negativa del potencial con respecto al desplazamiento en esa dirección.

En consecuencia, se llegará a E_x si se hace un pequeño desplazamiento en dirección x; se obtendrá E_y si se hace un pequeño desplazamiento en la dirección de y, y E_z si se hace un pequeño desplazamiento en la dirección z.

En general:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad 3.12$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad 3.13$$

3. 3 Cálculo del potencial eléctrico

Ejemplo 3.2 **Potencial electrostático de una esfera carga uniformemente**

Una esfera de radio R tiene una carga total Q distribuida uniformemente en su volumen. Determine el potencial electrostático dentro y fuera de la esfera.

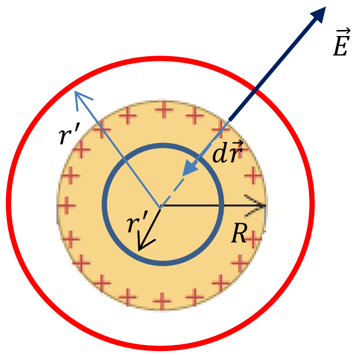

Figura 3.6 Esfera de radio R

Planteamiento: En todos los puntos fuera de la esfera el campo es el mismo que si la esfera se eliminara y se sustituyera por una carga puntual Q.

Se considera $V_0 = 0$ en el infinito, como se hizo para una carga puntual. Por lo tanto, el potencial en un punto en el exterior de la esfera a una distancia r de su centro es el mismo que el potencial debido a una carga puntual Q en el centro:

Potencial en puntos fuera de la esfera de radio R (Figura 3.6), $r' > R$

El potencial eléctrico en puntos fuera de una esfera es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Potencial en puntos internos a la esfera, $r < R$

El campo dentro de la esfera (Ejemplo 2.4), según se obtuvo aplicando la ley de Gauss, (ecuación (2.18)), era

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

Entonces, de acuerdo a la ecuación(3.9), el potencial de la esfera en puntos interiores es

$$V = V_0 - \int_{P_0}^{P} E dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \int_{R}^{r'} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} dr$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3}\int_R^{r'} r dr$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg]_R^{r'}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3}\left(\frac{r'^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'^2}{2R^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{2R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R^3}r'^2 \qquad 3.14$$

Según la ecuación (3.14), el potencial es máximo en el centro de la esfera, que corresponde a $r' = 0$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{2R}$$

La figura 3.7, muestra la gráfica del potencial en función del tiempo.

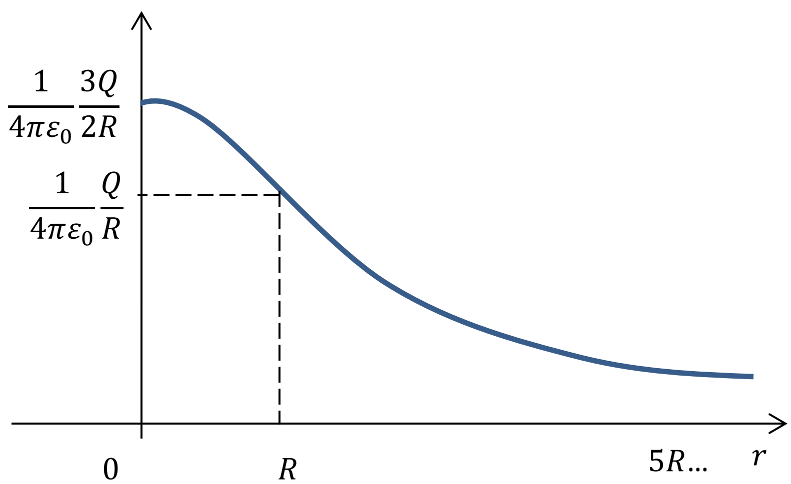

Figura 3.7 Potencial electrostático de una distribución esférica uniforme de carga.

Potencial eléctrico de una distribución continua de cargas Si la distribución de cargas se compone de varias cargas puntuales, el potencial electrostático en algún punto es la suma se los potenciales de Coulomb individuales, evaluados en ese punto,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i} \qquad 3.15$$

Cualquier otra distribución de carga se puede considerar como formada por pequeños elementos de carga dQ, cada uno de los cuales a su vez se puede considerar como carga puntual. Cada uno de esos elementos de carga aportará una cantidad dV al potencial en un punto,

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} \qquad 3.16$$

El potencial neto de la distribución de cargas es, entonces, la suma o la integral de todas las contribuciones de todos esos elementos de carga puntual:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{r} \qquad 3.17$$

Ejemplo 3.3 Potencial electrostático de un electrón

Un electrón está en reposo, al principio, a una distancia muy grande de un protón. Bajo la influencia de la atracción eléctrica, el electrón se mueve hacia el protón, el que permanece aproximadamente en reposo. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando ha llegado hasta $5.3 * 10^{-11} m$ del protón (véase figura 1.4).

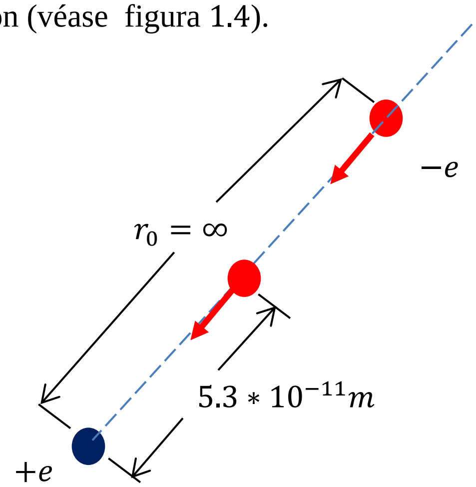

Figura 3.8 El electrón que se acerca se encuentra en cierto instante a la distancia de del protón.

Como el electrón al principio está en reposo, la energía cinética inicial es cero. Por otro lado, a una distancia muy grande $(r_0 \to \infty)$, la energía potencial es cero. La energía potencial del electrón es

$$U = qV = -eV$$

La energía total es la suma de las energías potencial y cinética:

$$K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - eV$$

Esta energía total se conserva. El valor inicial de la energía es cero, por consiguiente, el valor final de la energía también debe ser cero:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 - eV = 0$$

Entonces

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

Si consideramos un potencial de $V = 27V$. La velocidad es

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 * 10^{-19}C \times 27V}{9.11 * 10^{-31}Kg}} \quad \Rightarrow v = 3.1 * 10^6 \frac{m}{s}$$

Ejemplo 3.4 Potencial electrostático de un anillo de carga

Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme alrededor de un anillo delgado de radio a con carga total Q (figura 3.8). Determine el potencial en un punto P sobre el eje del anillo a una distancia x del centro del anillo.

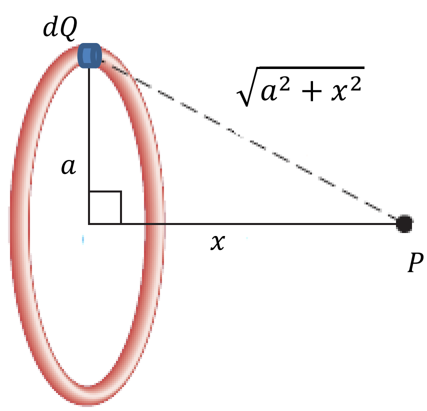

Figura 3.8 Anillo cargado

Planteamiento: Procedamos a dividir el anillo en segmentos infinitesimales de longitud ds, y luego podemos emplear la 3.17 para encontrar V.

La contribución de cada elemento infinitesimal ds, que contiene una carga dQ es

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r}$$

De la figura 3.8,

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Entonces

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Integrando

$$\int_V dV = \int_Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = \int_Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)}\int_Q dQ$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad 3.18$$

Comentarios:

Potencial en puntos lejos del aro ($x \gg a$), caso de la carga puntual

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{0 + x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x}$$

Este resultado nos da el potencial de una carga puntual como era de esperarse.

Ejemplo 3.5 Potencial electrostático de una línea de carga

Una carga eléctrica Q se encuentra distribuida de manera uniforme a lo largo de una línea o varilla delgada de longitud $2a$. Determine el potencial en el punto P a lo largo de la bisectriz perpendicular de la varilla a una distancia x de su centro.

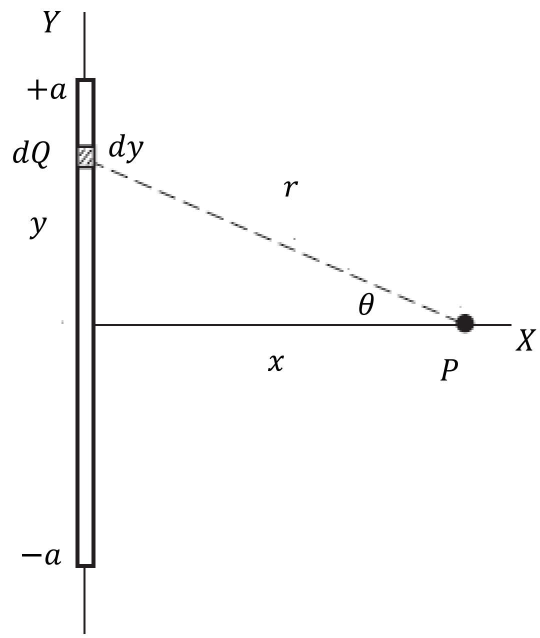

Figura 3.9 Línea de carga

Planteamiento: La situación se ilustra en la figura 3.9. Cada elemento de carga dQ está a una distancia diferente del punto P. El elemento de carga dQ que corresponde a un elemento de longitud dy sobre la varilla, está dado por

$$dQ = \left(\frac{Q}{2a}\right) dy$$

La contribución de cada elemento infinitesimal dy, que contiene una carga dQ es

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{Q}{2a}\right) dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Al integrar

$$\int_v dV = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

La integral

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Esta integral corresponde a integral 17.9.1 del libro MATHEMATICAL AND HANDBOOK OF FORMULAS AND TABLES, disponible en su versión digital en el sitio Web del profesor (www.unet.edu.ve/gilbpar), cuya solución es

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\left[ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\Big]_{-a}^{+a}\right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\left[ln\left(a + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - ln\left(-a + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a} ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a}\right) \qquad 3.19$$

Ejemplo 1.26 Potencial electrostático de una varilla de longitud l

Una varilla de longitud l tiene una carga Q distribuida uniformemente a lo largo de su longitud (véase la figura 3.10).Determínese el potencial electrostático a una distancia x de un extremo de la varilla.

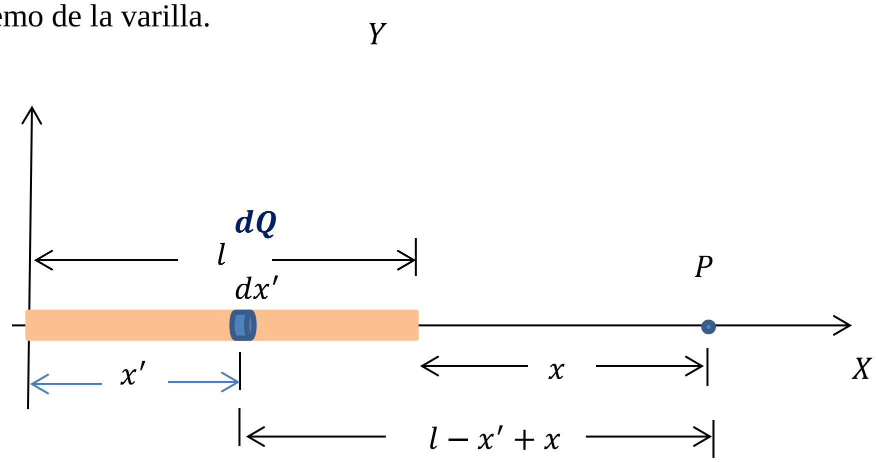

Figura 3.10 varilla de longitud l

Planteamiento: La situación se ilustra en la figura. Cada elemento de carga dQ está a una distancia diferente del punto P. El elemento de carga dQ que corresponde a un elemento de longitud dy sobre la varilla, está dado por

$$dQ = \left(\frac{Q}{l}\right) dx'$$

Este diferencial de carga está a una distancia r del punto P, como se ilustra en la figura, y que es

$$r = l - x' + x$$

La contribución de cada elemento infinitesimal dy, que contiene una carga dQ es

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{Q}{l}\right) dx'}{l - x' + x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\frac{dx'}{l - x' + x}$$

Integrando

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\int_0^l \frac{dx'}{l - x' + x}$$

Esta es una integral muy sencilla que puede resolverse con un cambio de variable.

$$u = l - x' + x \qquad \Rightarrow du = -dx'$$

Entonces

$$\int \frac{dx'}{x - x'} = -\int \frac{du}{u} = -ln(u) = -ln\,(l - x' + x)$$

Finalmente

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\left(-ln(l - x' + x)]_0^l\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}[-ln(x) + ln(x + l)]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l} ln\left(\frac{x + l}{x}\right)$$

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l} ln\left(1 + \frac{l}{x}\right) \qquad 3.20$$

Comentario: La distribución de cargas a lo largo de la varilla produce un potencial total proporcional a que, como el potencial de Coulomb, se modifica en $x = 0$. También, $V(x)$ tiende al potencial de Coulomb a distancias grande, donde es difícil distinguir la varilla de una carga puntual. Eso se puede ver desarrollando el logaritmo para valores pequeños de $\frac{l}{x} = z$, porque para una z pequeña, $ln(1+z) \approx z$. entonces

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\frac{l}{x} \quad \Rightarrow V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x}$$

Que era el resultado esperado.

Ejemplo 1.27 **Conduactor coaxial**

Un cable coaxial está formado por un conductor cilíndrico largo de radio a, concéntrico con un cascarón cilíndrico delgado mayor de radio b (Véase la figura 3.11). Si el conductor tiene una carga λ por unidad de longitud, distribuida uniformemente sobre su superficie ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los conductores interior y exterior? Supóngase que el espacio entre ellos está vació.

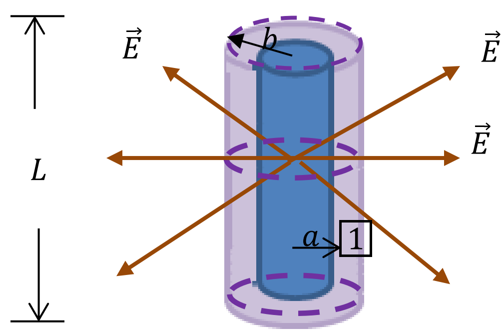

Figura 3.11 Cable coaxial

Planteamiento: De acuerdo al Ejemplo 1.14, ecuación (1.33) el campo eléctrico producido por un filamento de longitud infinita, es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad 3.21$$

Donde r es la distancia desde el eje de simetría del filamento hasta un punto.

Si se integra radialmente hacia adentro, desde el diámetro del conductor externo $(r = b)$ hasta el conductor externo $(r = a)$

$$V = V_0 - \int_{P_0}^{P} \vec{E}.d\vec{r}$$

Si definimos $V_0 = V_b$ y $V = V_a$, por tanto queda automáticamente definido $P_0 = b$ y $P = a$

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}.d\vec{r} \qquad 3.22$$

Como se muestra en la figura, $\vec{E}.d\vec{r} = Edr$

Entonces la ecuación (3.22) es

$$V_a - V_b = -\int_b^a Edr \qquad 3.23$$

Sustituyendo ecuación (3.21) en (3.23), resulta

$$V_a - V_b = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$V_a - V_b = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[ln(a) - ln(b)] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[ln(b) - ln(a)]$$

$$V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad 3.24$$

Comentario: El cilindro exterior no tuvo papel alguno en los cálculos, ya que para esta distribución simétrica sólo afecta al campo eléctrico cuando $r = b$. Obsérvese que debido a la dependencia logarítmica entre potencial y distancia, no se pudo haber calculado el potencial del conductor central sólo con respecto a la distancia infinita, el resultado habría sido infinito. Esta es una reflexión acerca del hecho de haber construido una distribución infinita de carga. El uso real, para un cable coaxial el conductor externo tiene una carga opuesta por unidad de longitud, $\lambda = {}^{-Q}/_{L}$, por lo que $E = 0$ en el exterior, y se puede hacer que el potencial de referencia sea $V_0 = 0$, en cualquier punto fuera del cable.