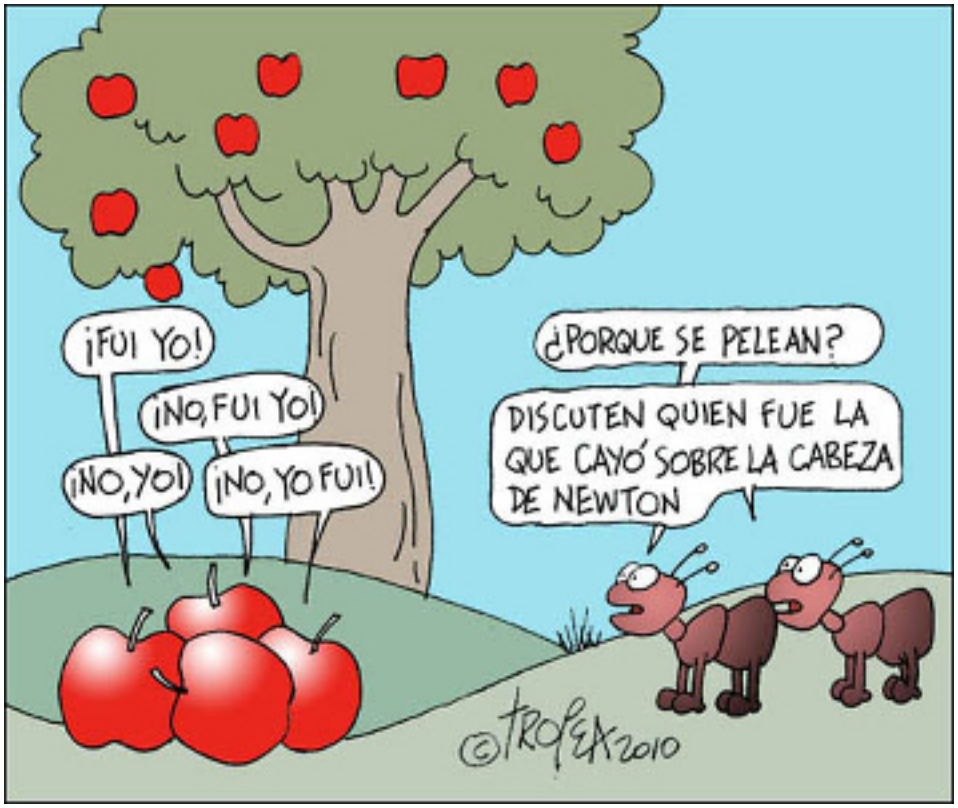
Contraste de Hipótesis

¿Qué factores influyen?

¿POR QUÉ?

¿CÓMO?



Hipótesis

- **Suposición** posible o imposible de algo para sacar una consecuencia.

- **Proposición** no demostradas que se admite para orientar investigaciones y experimentos.

- **Explicación no basada en pruebas**, es decir, sin ser suficientemente demostrada.

- **Conjetura** de la cual se parte para poder explicar racionalmente la causa real de un hecho.

Contrastes de hipótesis

El método científico se caracteriza por basarse en la construcción de hipótesis, o modelos, lo más simples posibles de cómo funciona cierto aspecto de la naturaleza, y la comprobación o refutación de tales hipótesis por medio de la experimentación.

A través del contraste de hipótesis, la estadística proporciona procedimientos óptimos para **decidir la aceptación o el rechazo de afirmaciones o hipótesis** acerca de la población en estudio.

Ensayos de hipótesis

Hipótesis estadística	**Es una afirmación o conjetura que se hace sobre una, o varias, características de una población.** Por ejemplo, que la media de una población tenga un determinado valor

El primer paso en un proceso de ensayo de hipótesis es la formulación de la hipótesis estadística que se quiere aceptar o rechazar. *Comúnmente, se formulan las hipótesis estadísticas con el propósito de rechazarlas para así probar el argumento deseado.*

Hipótesis Nula (H_0)	La hipótesis de partida que se quiere contrastar Supone que NO hay diferencias entre el estadístico y el parámetro
Hipótesis Alternativa (H_1)	La hipótesis que se acepta cuando se rechaza H_0 Supone que SI hay diferencias entre el estadístico y el parámetro

Hipótesis nula y alternativa

✓Una hipótesis nula siempre asegura que no hay diferencia entre el estadístico y el parámetro.

✓Aunque solo se cuente con la información que proporciona la muestra, la hipótesis nula se escribe en términos del parámetro de la población.

✓Si una hipótesis nula es considerada falsa, algo debe ser cierto, es cuando se considera la hipótesis alternativa

✓La metodología de las pruebas de hipótesis esta diseñada para analizar la aceptación o rechazo de hipótesis nula, sin embargo, no rechazar una hipótesis nula, no es prueba de que esta sea cierta.

✓Nunca se puede probar que una hipótesis nula sea correcta, porque la decisión se basa en la información que aporta la muestra, no en la información de toda la población.

Hipótesis nula y alternativa

✓La hipótesis nula H_0 es la hipótesis que siempre se prueba

✓La hipótesis alternativa H_1 se formula opuesta a la hipótesis nula, y es la conclusión de apoyo si se rechaza la hipótesis nula.

✓La hipótesis nula siempre se refiere a un valor especifico del parámetro poblacional y no al estadístico muestral.

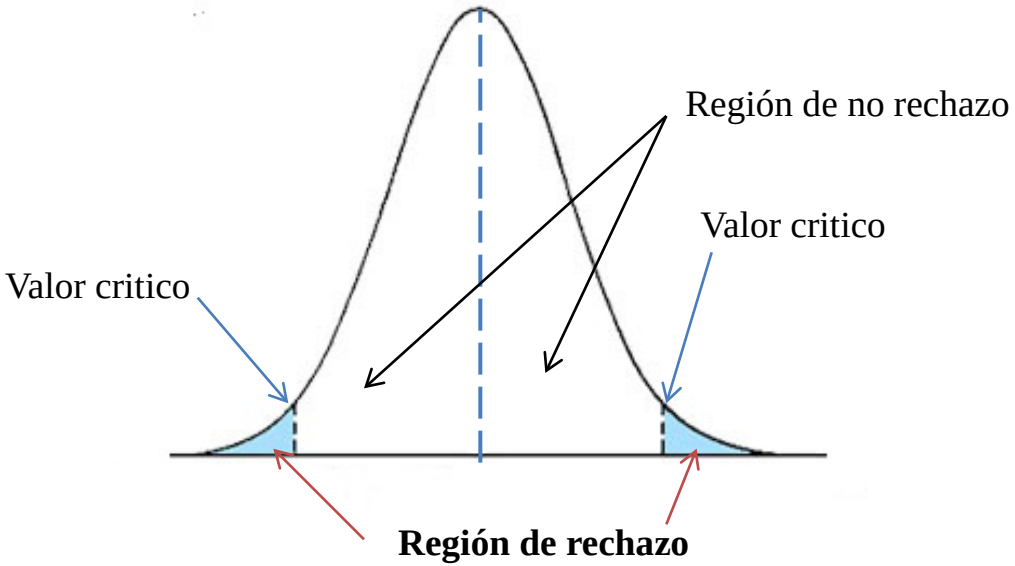
✓La expresión de la hipótesis nula siempre contiene un signo igual respecto al valor especificado del parámetro de la población.

✓La expresión de la hipótesis alternativa nunca contiene un signo igual respecto al valor especificado del parámetro de la población

Aun cuando es común hablar de probar una hipótesis nula, el objetivo de investigación suele ser demostrar apoyo para la hipótesis alternativa, si dicho apoyo se justifica.

Las partes esenciales de una prueba estadística son el estadístico de prueba y una región de rechazo asociada

Estadístico de prueba	(al igual que un estimador) es una función de las mediciones muestrales en las que la decisión estadística estará basada.
Valor critico	Es el valor del estadístico de prueba en su correspondiente distribución en el muestreo (Z, t, χ^2, F) y que divide a dicha región en dos regiones : **Aceptación y rechazo**
Región de rechazo (RR)	Especifica los valores del estadístico de prueba para el cual la hipótesis nula H_0 ha de ser *rechazada a favor de la hipótesis* alternativa.



Si, para una muestra particular, el valor calculado del estadístico de prueba cae en la región de rechazo RR, rechazamos la hipótesis nula H_0 *y aceptamos la hipótesis alternativa* H_1 .

Si el valor del estadístico de prueba no cae en la RR, aceptamos H_0.

Riesgos en la toma de decisiones

El hecho de utilizar estadísticos muestrales para tomara decisiones sobre parámetros poblacionales, incide en el hecho de correr riesgos al establecer conclusiones incorrectas. Dichas decisiones incorrectas reciben el nombre de **error tipo I** y **error tipo II.**

Se comete un **error tipo I** si H_0 es rechazada cuando H_0 es verdadera. La probabilidad de un error tipo I esta denotada por α . El valor de α se denomina nivel de la prueba.

$$P(\text{Error tipo I}) = P(\text{rechazar } H_o / H_0 \text{ Es verdadera}) = \alpha$$

Se comete un **error tipo II** si H_0 es aceptada cuando H_1 es verdadera. La probabilidad de un error tipo II esta denotada por β .

$$P(\text{Error tipo II}) = P(\text{No rechazar } H_o / H_0 \text{ Es falsa}) = \beta$$

Glosario

Coeficiente/nivel de significancia

Se define como la probabilidad de cometer un **error de tipo I** en una prueba estadística. Se denota por la letra griega α . Se debe especificar antes de realizar la prueba de hipótesis y queda bajo control directo de quien investiga o realiza la prueba. Por lo general se asume valores de 0,05 y 0,01. En si es la probabilidad de rechazo para la hipótesis nula, y a su vez determina las regiones de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula.

Coeficiente/nivel de confianza

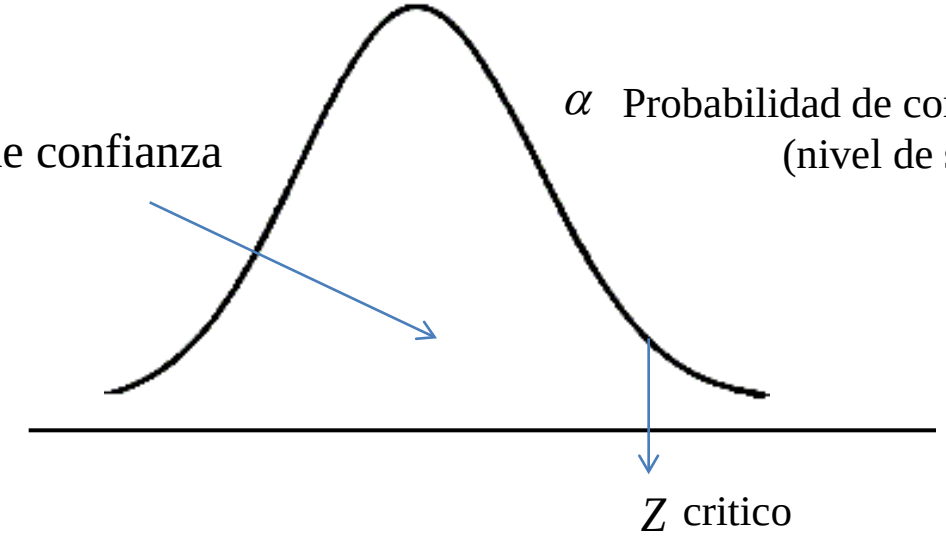
Se define como la probabilidad de que la hipótesis nula H_0 no sea rechazada cuando realmente es cierta y no se debe rechazar. Es el complemento de la probabilidad de cometer un **error de tipo I**, por lo tanto se denota por $(1-\alpha)$. Al multiplicarse por *100* se obtiene el **nivel de confianza.**

Riesgo

Se define como la probabilidad de cometer un **error de tipo II**. Se le llaman también nivel de riesgo del consumidor. Depende de la diferencia entre el valor hipotético y el valor real del parámetro poblacional.

Potencia de una prueba

Se define como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando realmente es falsa y debe rechazarse. Es el complemento $(1-\beta)$ de la probabilidad de un **error tipo II**. También se le llama *poder de una prueba estadística*.



Tipos de errores

Decisión \ Hipótesis	Verdadera $\mathbf{H_0}$	Falsa $\mathbf{H_0}$
Aceptar a H_0	**Decisión correcta**	Error tipo II
Rechazar a H_0	**Error tipo I**	**Decisión correcta**

$\alpha \rightarrow$ Nivel de significación que indica la probabilidad máxima con la que se puede cometer un error de tipo I

$\beta \rightarrow$ Nivel de significación que indica la probabilidad máxima con la que se puede cometer un error de tipo II

Un grupo de investigación elaboraba un nuevo sistema de inyección de combustible con objeto de aumentar el rendimiento combustible en un determinado modelo de automóvil.

Como con el sistema actual el rendimiento promedio es 24 millas por galón, la prueba de hipótesis se formuló como sigue.

$$H_0 : \mu \leq 24$$
$$H_1 : \mu > 24$$

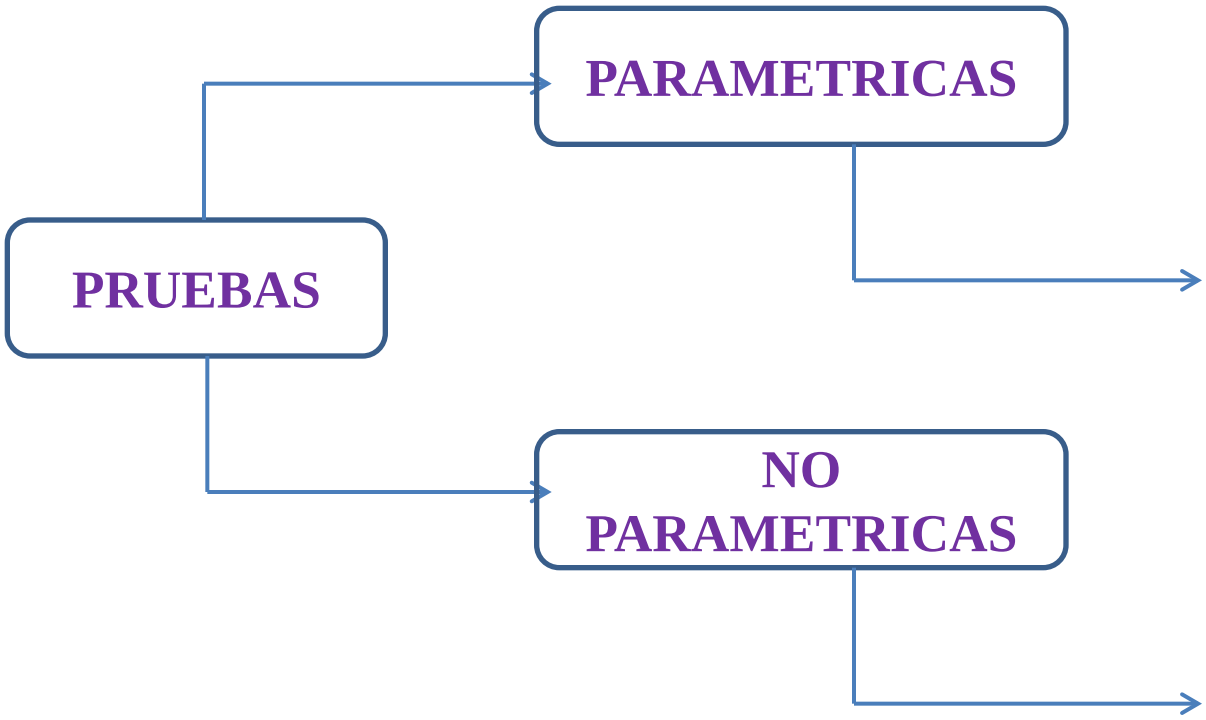
$H_1 : \mu > 24$ los investigadores buscan evidencias muestrales que apoyen la conclusión de que con el nuevo sistema de inyección de combustible la media poblacional del rendimiento es mayor que 24 millas por galón

Error tipo I rechazar H_0 cuando es verdadera: corresponde a la afirmación de los investigadores de que el nuevo sistema mejora el rendimiento $\mu > 24$ cuando en realidad el nuevo sistema no es nada mejor que el actual.

Error tipo II de aceptar H_0 cuando es falsa corresponde a la conclusión de los investigadores de que el nuevo sistema no es mejor que el actual $\mu \leq 24$ cuando en realidad el nuevo sistema sí mejora el rendimiento.

Para casi todas las situaciones reales, las decisiones incorrectas cuestan dinero, prestigio o tiempo e implican una perdida

Pruebas estadísticas



- ❑Escala de intervalos o razón
- ❑Se ajusta a la curva normal
- ❑Varianzas iguales

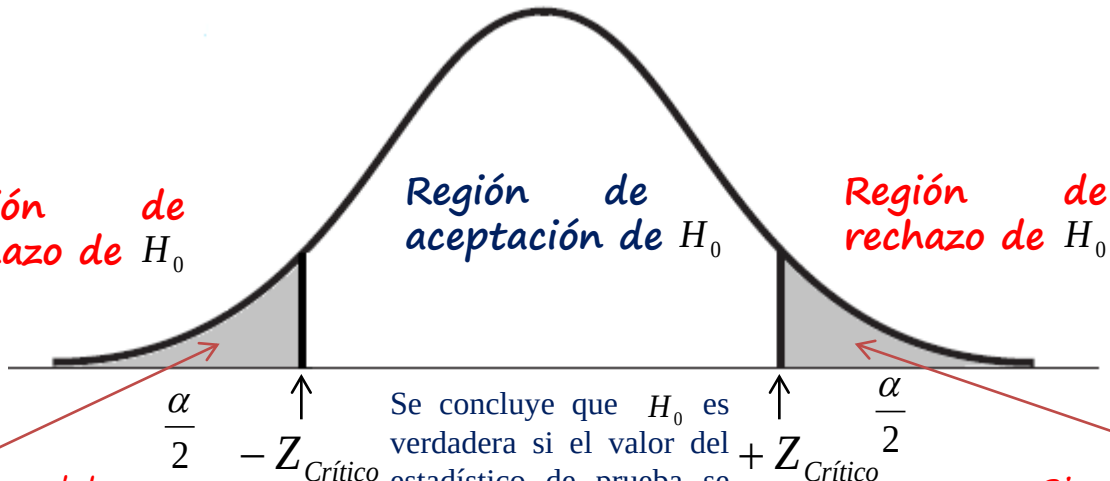
- ❑Escala ordinal o por rangos
- ❑Su distribución es libre
- ❑Menos supuestos para cumplir

Fases de un contraste de hipótesis

1. Establecer cuales son las hipótesis nula H_0 y alternativa H_1
2. Elegir un nivel de significación α
3. Especificar el tamaño muestral n .
4. Seleccionar el estadístico de prueba apropiado
5. Determinar la región critica a partir del tipo de estadístico de prueba y el nivel de significación deseado
6. Calcular el valor del estadístico a partir de los datos de la muestra particular que se tenga
7. Tomar la decisión estadística apropiada. Es decir, rechazar H_0 si el estadístico toma un valor en la región crítica, o aceptarla (o como mínimo, no rechazarla) en caso contrario.

Ensayos referentes a la distribución normal

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL SE UTILIZA CUANDO LA MUESTRA ES GRANDE



Se concluye que H_0 es verdadera si el valor del estadístico de prueba se ubica en este intervalo.

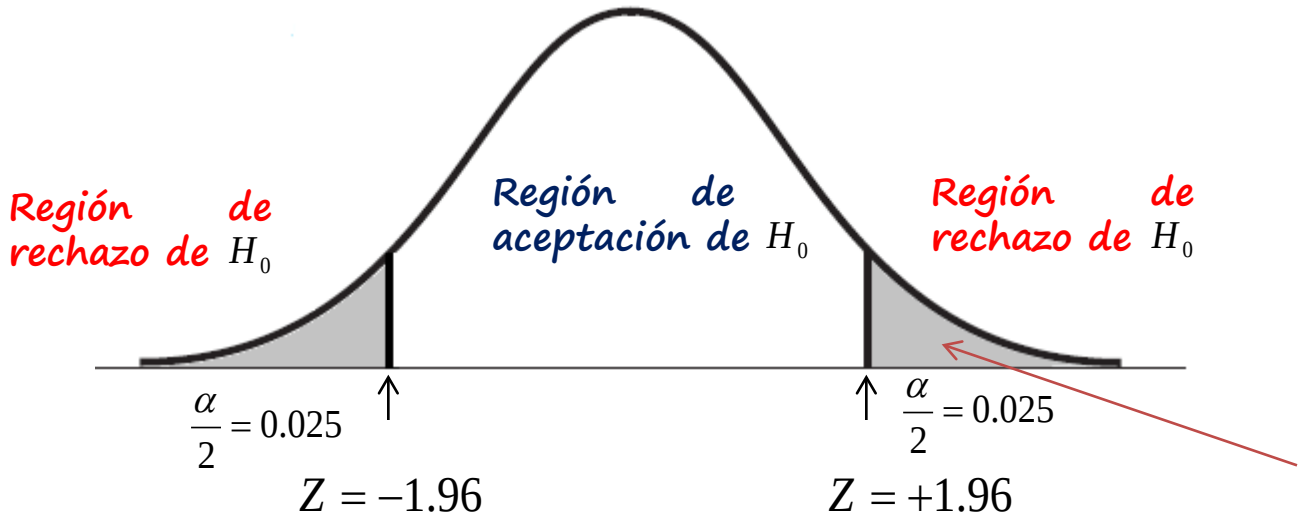
Si el valor del estadístico de prueba se ubica en este intervalo se rechaza H_0.

Si el valor del estadístico de prueba se ubica en este intervalo se rechaza H_0 .

Ensayos de dos colas

Se aplica cuando se esta interesado en los valores extremos a ambos lados del parámetro, es decir, en las colas de la distribución .

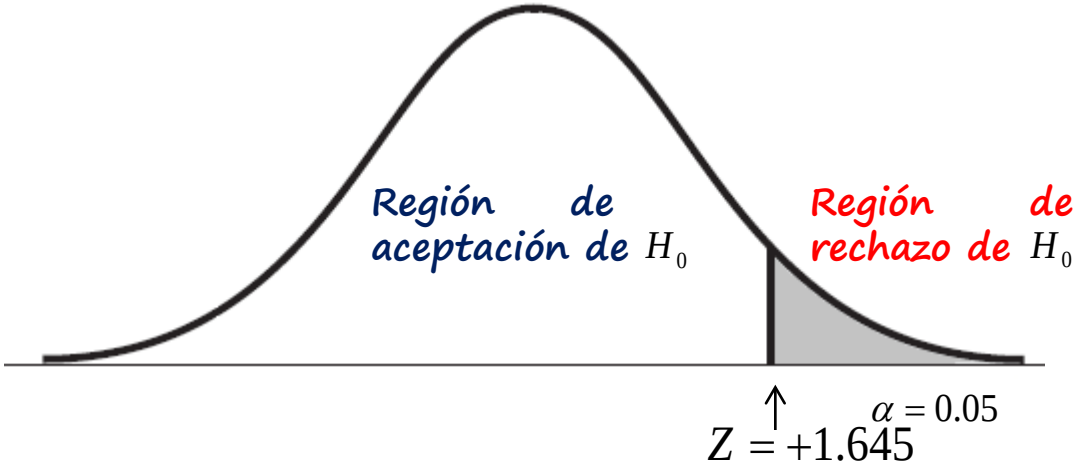
Por ejemplo para un nivel de significancia 5%, se tiene



Ensayos de una cola

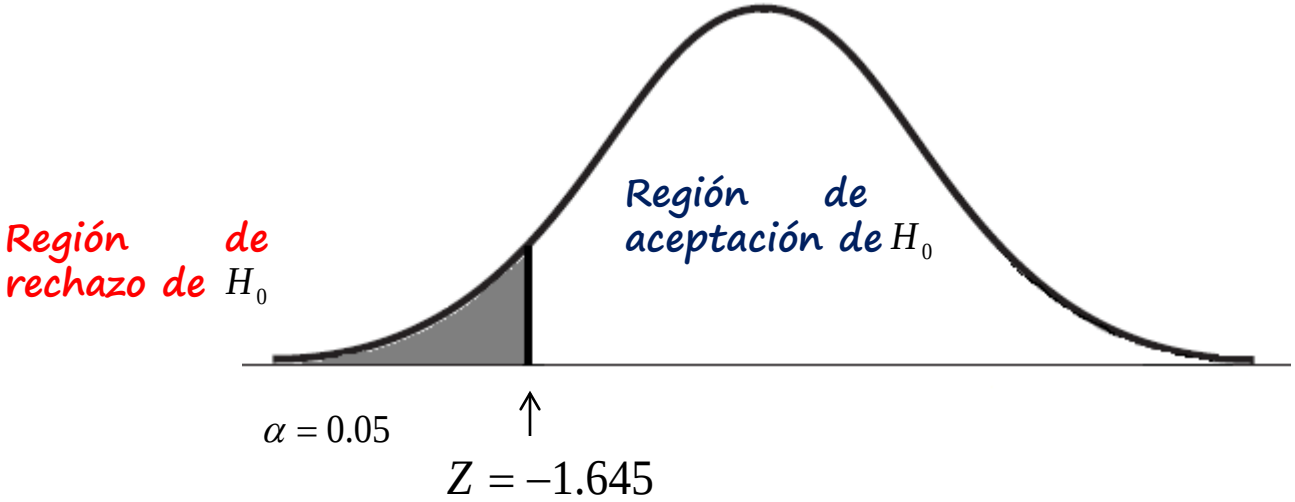
Extremo derecho

Se aplica cuando se esta interesado en los valores extremos a un solo lado del parámetro, es decir, en una cola, extremo derecho de la distribución.
Por ejemplo para un nivel de significancia 5%, se tiene



Extremo izquierdo

Se aplica cuando se esta interesado en los valores extremos a un solo lado del parámetro, es decir, en una cola, extremo izquierdo de la distribución.
Por ejemplo para un nivel de significancia 5%, se tiene



Valore críticos de Z de mayor uso

Z_C \ α	1%	5%	10%
Prueba de una cola	+2.33 o -2.33	+1.645 o -1.645	+1.28 o -1.28
Prueba de dos colas	+2.58 y -2.58	+1.96 y -1.96	+1.645 y -1.645

Procedimiento para probar hipótesis (Enfoque tradicional)

Formular H_1

Plantear las Hipótesis

Formular H_0

Tipo de prueba

Seleccionar un nivel de significancia α

¿Varianza? Ecuación

Calcular el estadístico de prueba

Establecer una regla de decisión

Tomar una decisión

Rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa

Aceptar la hipótesis nula

Ejemplo 1: Prueba para una media poblacional

Un gimnasio recién inaugurado, invita a su afiliación argumentando una reducción de peso, al menos de 4,6 kilogramos. Una muestra aleatoria de 34 personas, revela que el promedio de reducción de peso es de 4,1 kilogramos, con una desviación típica de 1,8 kilogramos. A un nivel del 1%, Se puede creer lo tan anunciado por el gimnasio?

Datos $n = 34$ $\overline{X} = 4.1Kg$ $\mu = 4{,}6Kg$ $s = 1.8Kg$

PLANTEAR LAS HIPÓTESIS

H_0 No existe diferencia significativa entre el promedio anunciado por el gimnasio y el promedio de la muestra

H_1 El promedio anunciado por el gimnasio es menor

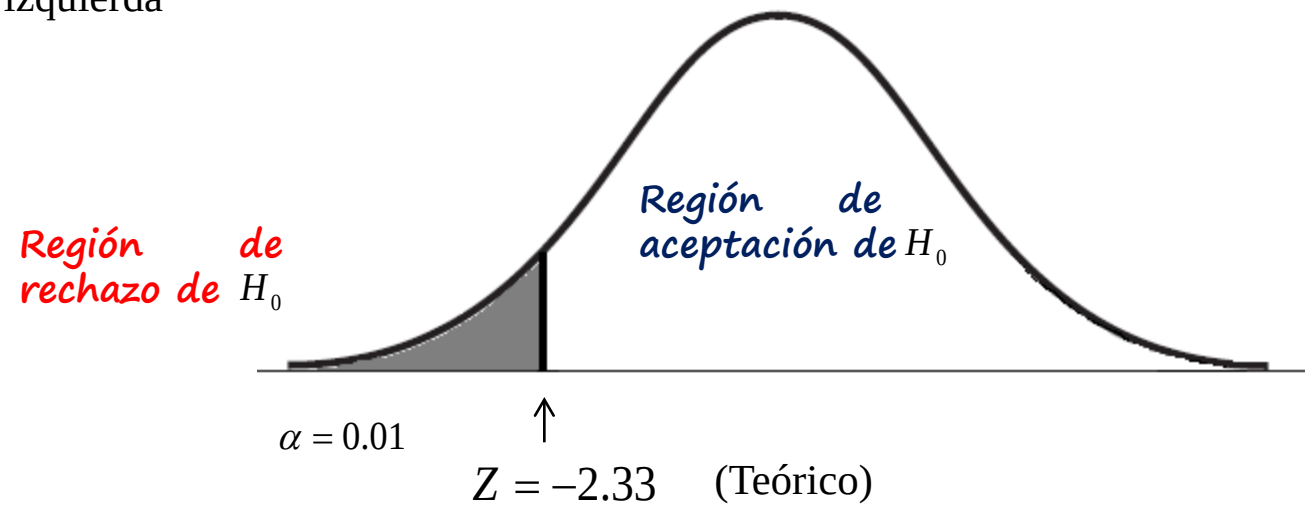
$H_0: \mu = 4.6$ Kg

$H_1: \mu < 4.6$ Kg

SELECCIONAR EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA

$\alpha = 0.01$ Es una prueba de una media poblacional

No se conoce la varianza de la población. Se tiene la varianza de la muestra. Es una prueba de cola izquierda



CALCULAR EL ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$Z_{calc} = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z_{calc} = \frac{4.1 - 4.6}{\frac{1.8}{\sqrt{34}}} \Rightarrow Z_{calc} = -1.62$$

FORMULAR UNA DECISIÓN

$Z_{calc} \geq Z_{Tab} \Rightarrow$ Se acepta $\mathbf{H_0}$, de lo contrario se rechaza y se acepta $\mathbf{H_1}$.

$$-1.62 \geq -2.33$$

TOMAR UNA DECISIÓN

Como $-1.62 \geq -2.33$

Cae en la región de aceptación

$\therefore$ Se acepta la hipótesis nula $\mathbf{H_0}$

Si se puede creer en lo que anuncia el gimnasio como promoción

Ejemplo 2: Prueba para la diferencia de medias muestrales

Un gerente aplico el mismo test de capacitación a dos grupos. El primero de 50 empleados obtuvo una media de 65 puntos con una desviación típica de 10 puntos. El segundo grupo de 40 empleados arrojó una media de 62 puntos con desviación estándar de 8 puntos. ¿ Existe una diferencia significativa entre las medias de los dos grupos a un nivel de significación del 5%

PLANTEAR LAS HIPÓTESIS

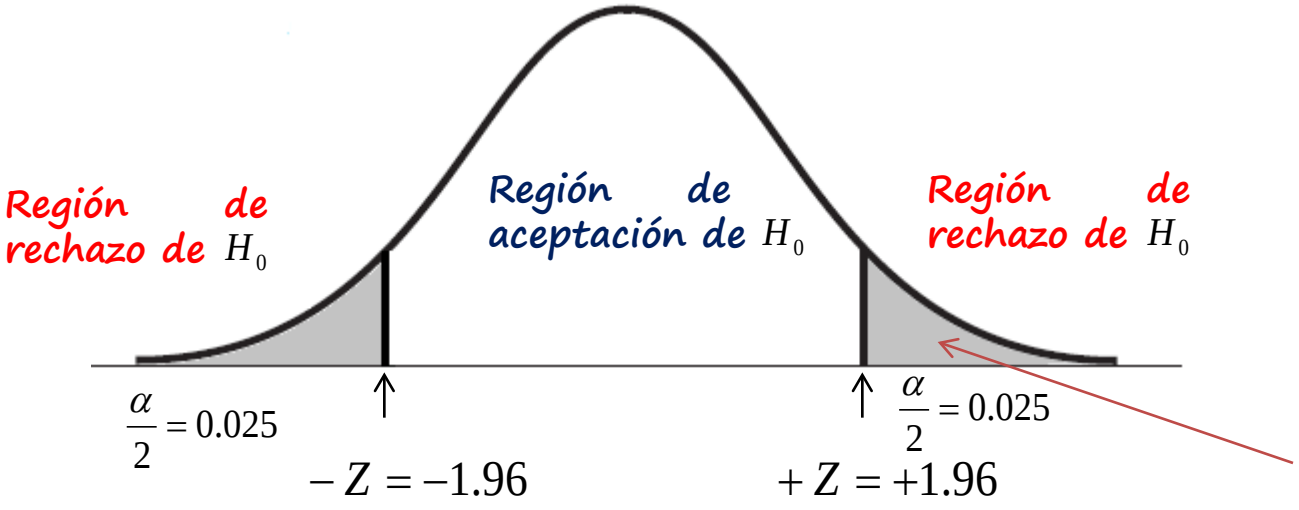
H_0 No existe diferencia significativa entre el promedio del primer grupo y el promedio del segundo

H_1 Los promedios de los dos grupos son diferentes

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

SELECCIONAR EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA

$\alpha = 0.05$ Es una prueba de diferencia de medias muestrales



CALCULAR EL ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \Rightarrow Z = \frac{65 - 62}{\sqrt{\frac{10^2}{50} + \frac{8^2}{40}}} \quad \Rightarrow Z = 1.58\sigma$$

FORMULAR UNA DECISIÓN

$-Z_{Tab} \leq Z_{calc} \leq +Z_{Tab} \Rightarrow$ Se acepta H_0, de lo contrario se rechaza y se acepta H_1 .

$$-1.96 \leq 1.58 \leq +1.96$$

TOMAR UNA DECISIÓN

$$-1.96 \leq 1.58 \leq +1.96$$

Cae en la región de aceptación

$\therefore$ Se acepta la hipótesis nula H_0

Los dos grupos tienen el mismo promedio en el test aplicado

Enfoque del valor P para la prueba de hipótesis

Por lo general, en la prueba de hipótesis, se anuncia que la hipótesis nula fue rechazada o no en un valor (α) de nivel de significación especificado, es decir, el nivel de significación es predefinido. Esto implica riesgos e incomodidad a los responsables de tomar decisiones. Por tal razón se ha adoptado universalmente **el enfoque del valor P**.

Definición: El valor **P** es el nivel de significación mas bajo que llevaría al rechazo de la hipótesis nula H_0 con los datos dados.

✓**El valor P** puede considerarse como el nivel α mas bajo en el que los datos son significativos.
✓Cuando se conoce el **valor P**, el responsable de tomar decisiones puede determinar por si mismo que tan significativos son los datos sin que el analista le imponga un nivel de significación preseleccionado.
✓Cuando se prueban hipótesis apoyándose en la distribución normal, el calculo del valor P es relativamente sencillo, Si Z_{cal} es el valor calculado del estadístico de la prueba.

Calculo del valor P

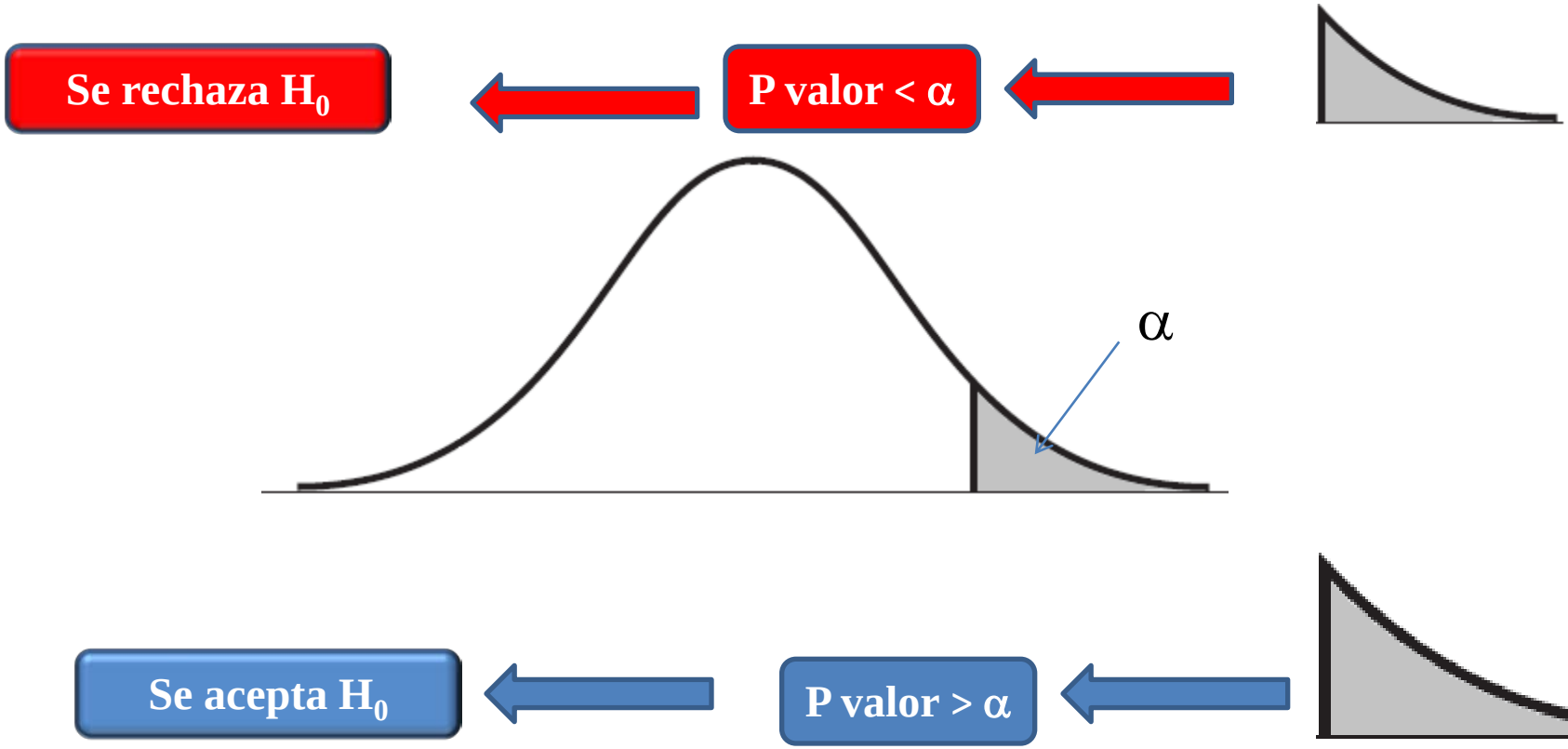
$$P\begin{cases} 2(1 - AreaZ_{calc}) & \text{Para prueba de dos colas} \\ 1 - AreaZ_{calc} & \text{Para una prueba de cola superior} \\ AreaZ_{calc} & \text{Para una prueba de cola inferior} \end{cases}$$

Valor P en la prueba de hipótesis

Valor P es la probabilidad de observar un valor muestral tan extremo, que el valor observado, dado que la hipótesis nula es verdadera.

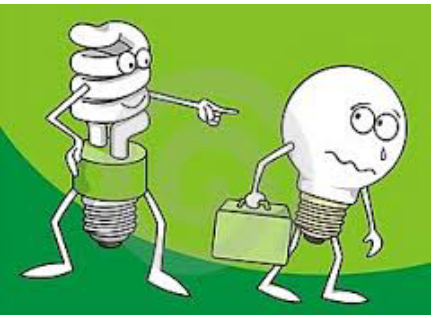
Si el valor P es mas pequeño que el nivel de significancia, se rechaza H_0.

Si el valor P es mas grande que el nivel de significancia, H_0 no se rechaza



Síntesis de las pruebas de hipótesis para la media poblacional: Caso σ conocida

	Prueba de la cola inferior	Prueba de la cola superior	Prueba de las dos colas
Hipótesis	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Estadístico de prueba	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
Regla de rechazo: método del valor-*p*	Rechazar H_0 si valor $-p \leq \alpha$	Rechazar H_0 si valor $-p \leq \alpha$	Rechazar H_0 si valor $-p \leq \alpha$
Regla de rechazo: método del valor crítico	Rechazar H_0 si valor $z \leq -z_\alpha$	Rechazar H_0 si valor $z \geq z_\alpha$	Rechazar H_0 si valor $z \leq -z_{\alpha/2}$ o si $z \geq z_{\alpha/2}$



Ejercicio: Se sabe que la vida útil en horas de una bombilla de 75 Watts tiene una distribución aproximadamente normal, con una varianza de 625 horas. Una muestra aleatoria de 20 bombillas tiene una vida útil media de 1014 horas. Se pregunta: a) ¿Hay evidencia que apoye la afirmación de que la vida útil de las bombillas excede en 1000 horas, con un nivel de significación de 5%? B) Cual es el valor P para la prueba en el inciso a? Construya un intervalo de confianza de dos colas de 95% para la vida útil media.

Datos $\sigma^2 = 625$ horas $n = 20$ $\overline{X} = 1014$ horas

a) Hay evidencia que apoye la afirmación de que la vida útil de las bombillas excede en 1000 horas, con un nivel de significación de 5%?

Es una prueba de hipótesis para la media aritmética

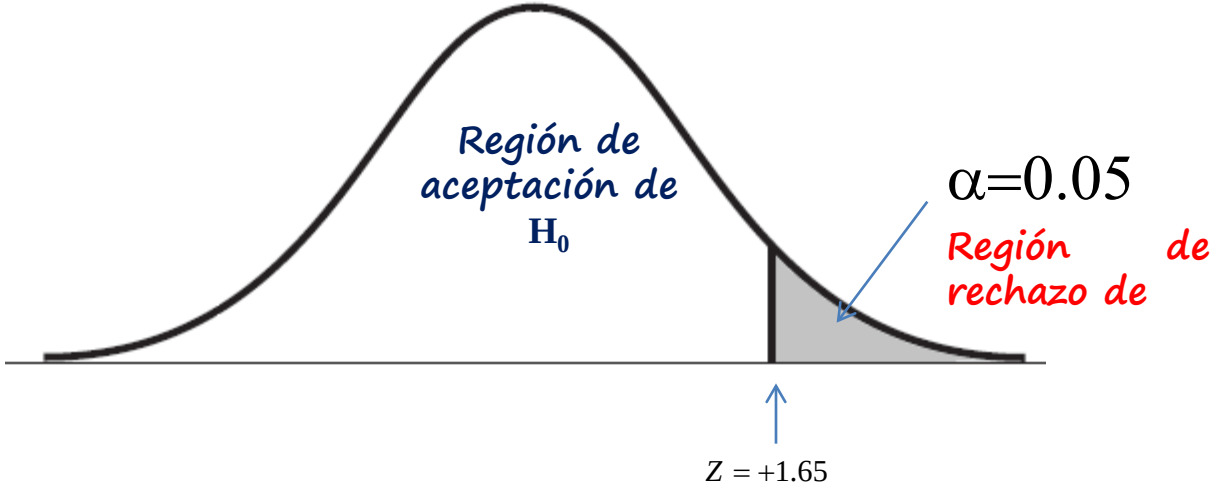
PLANTEAR LAS HIPÓTESIS

H_0 : La vida útil de las bombillas es de 1000 horas
H_1 : La vida útil de las bombillas es superior a las 1000 horas

H_0 : μ=1000 horas
H_1 : μ>1000 horas

SELECCIONAR EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA

α=0.05 Es una prueba de una cola por el extremo derecho para la media aritmética



CALCULAR EL ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$Z_{calc} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z_{calc} = \frac{1014 - 1000}{\frac{25}{\sqrt{20}}} \Rightarrow \qquad Z_{calc} = 2.50\sigma$$

FORMULAR UNA DECISIÓN

$Z_{calc} \leq Z_{Tab} \Rightarrow$

$2.50 > 1.65$

Se acepta H_0 de lo contrario se rechaza y se acepta H_1

TOMAR UNA DECISIÓN

2.50>1.65

Cae en la Región de rechazo

Conclusión: La vida útil de las bombillas de 75 watts es superior a 1000 horas

b) Cual es el **valor P** para la prueba en el inciso a?

P=1- (Área$_{aculmuaada}$ *de* Z$_{calculado}$) Para una prueba de cola superior

P=1-0.9938 ➡ P=0.0062

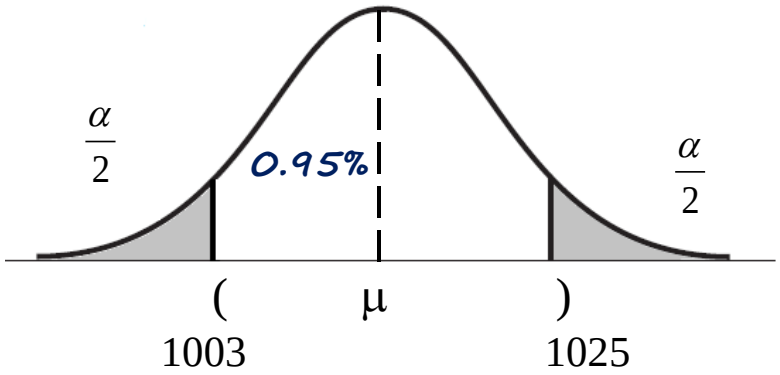
0.0062 es el nivel de significación mas bajo que llevaría a rechazar la hipótesis nula con estos datos. Y como 0.0062<0.05 se concluye que se rechaza **H_0** a este nivel de significación

c) Construya un intervalo de confianza de dos colas de 95% para la vida útil media.

$$C\left(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \le \mu \le \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) = 1-\alpha$$

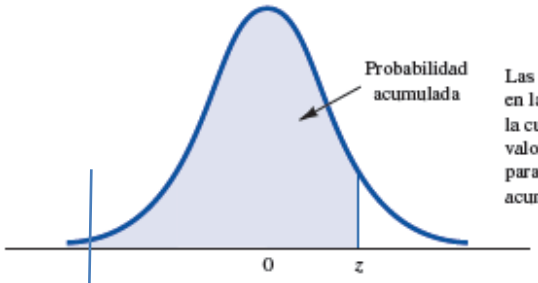
$$C\left(1014 - 1.96(5.59) \le \mu \le 1014 + 1014(5.59)\right) = 0.95$$

$$C\left(1003.04 \le \mu \le 1024.96\right) = 0.95$$



Con una confianza del 95% se estima que la vida útil de las bombillas de 75 watts estará entre 1003 horas y 1025 horas

PROBABILIDADES ACUMULADAS EN LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR (*continuación*)



Las entradas que aparecen en la tabla dan el área bajo la curva y a la izquierda del valor de z. Por ejemplo, para $z = 1.25$, la probabilidad acumulada es 0.8944.

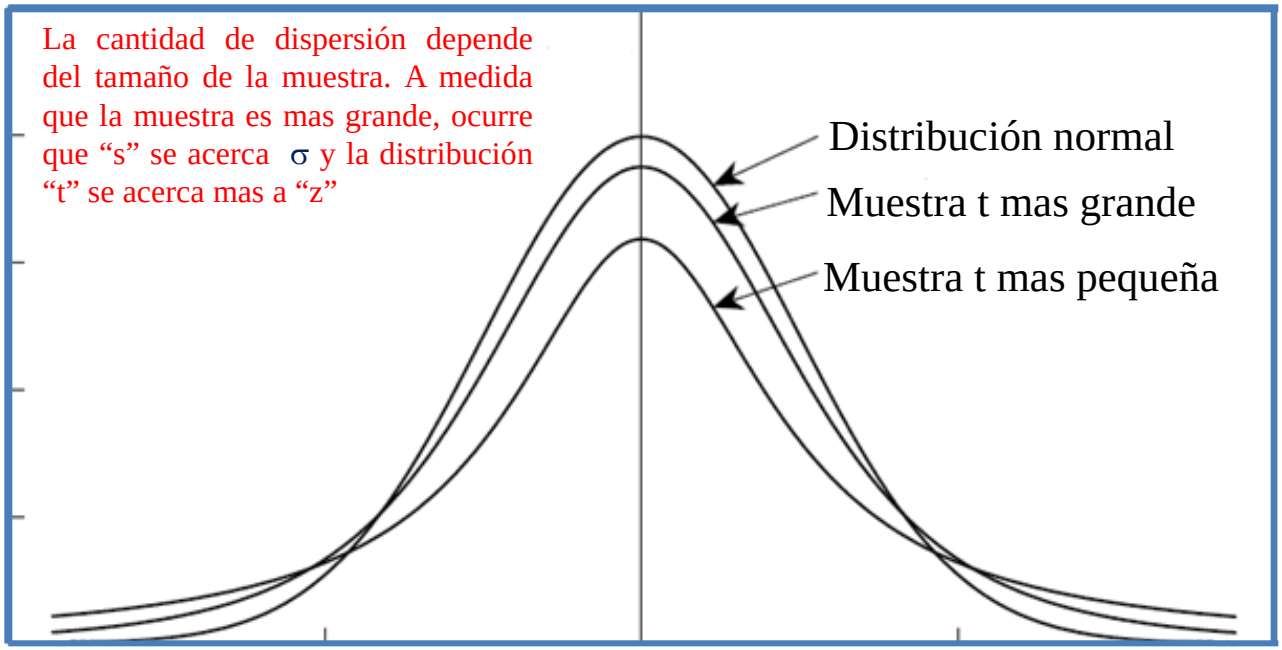
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

2.5+0.00=2.5

En cualquier libro de estadística, estas tablas se encuentran al final de los mismos. Para nuestros ejemplos he tomado una fotografía de la región de interés.

Pruebas paramétricas para muestras pequeñas (n < 30)

Distribución t de Student



Se debe a que “s” introduce mayor incertidumbre y hace que “t” sea menos alargada

La distribución t

$$y = k\left(1+\frac{t^2}{\vartheta}\right)^{-\frac{\vartheta+1}{2}}$$

✓si n es el tamaño muestral, entonces llamaremos a *n-1* el numero de grados de libertad de la muestra

✓Los grados de libertad de un conjunto de datos viene dado por el numero de valores que se puede asignar arbitrariamente a una totalidad de variables antes de quedar determinados por su relación: Se expresa por

$$\vartheta = n-1$$

Tablas t

Gosset calculó tablas de la distribución “t” para diferentes tamaños muestrales: Es decir, grados de libertad

Columnas: Grados de libertad y nivel de significancia (Para una y dos colas)

Resumen

- La distribución tiene forma de campana y es simétrica.
- Es mas achatada que la distribución normal.
- Es platicúrtica y con mas área en los extremos.
- No existe una sola distribución “*t*”. Existe una familia.
- Al aumentar el tamaño “n” se acerca a la normal.
- Su forma lo determinan los grados de libertad.
- La cantidad de dispersión depende del tamaño de “*n*”.

Prueba t de Student

La prueba “t” supone que las variables están medidas como mínimo en una escala de intervalos

Una compañía que vende cereales, imprime sobre el paquete “contiene 12 Kg”. Un supervisor gubernamental selecciona una muestra de 9 paquetes, y su peso promedio da un valor de 12,24 Kg. Con un promedio de dispersión de 0.6 Kg. ¿Qué conclusión puede emitirse para tomar una decisión acerca de lo especificado por la compañía en lo impreso en los paquetes sobre su peso con un nivel de significación de 0.05?

Lo que interesa saber es si lo que lleva impreso los paquetes en cuanto a su peso es cierto o no, basándonos en los datos suministrados por la muestra que seleccionó el supervisor considerando cierto grado de incertidumbre. Así mismo, el tamaño de la muestra es pequeño, por lo tanto, se recurre a una prueba de hipótesis donde la distribución muestral del estadístico se comporta como una distribución “t” de Student

Datos: $\mu = 12Kg;\quad n = 9;\quad \overline{X} = 12.24Kg;\quad s = 0.6Kg;\quad \alpha = 0.05$

PLANTEAR LAS HIPÓTESIS

H_0 : No existe diferencia significativa entre lo especificado por la compañía en la etiqueta en cuanto al peso promedio obtenido por el supervisor de la muestra

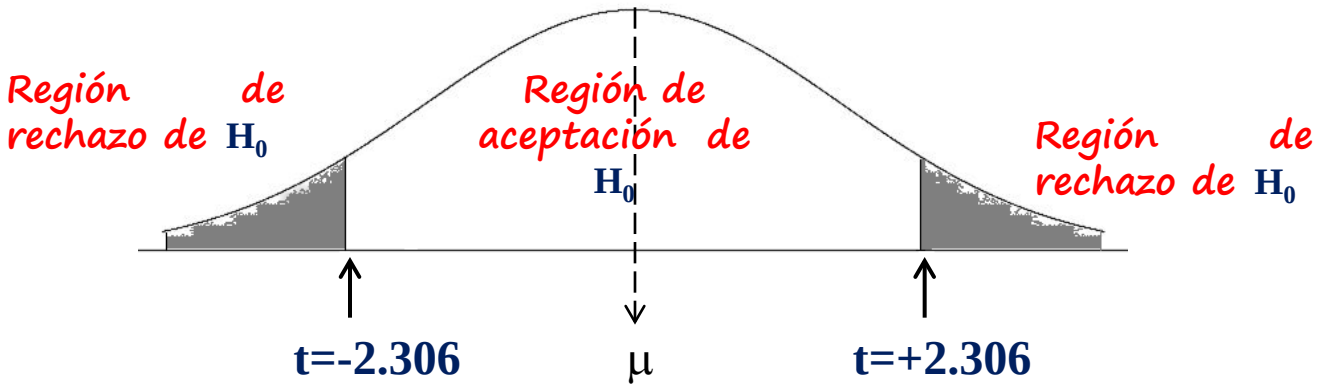
H_1 :**El peso de los paquetes de cereal es diferente al especificado por la compañía en la etiqueta.**

H_0 : $\mu = 12Kg$

H_1 : $\mu \neq 12Kg$

SELECCIONAR EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA

$\alpha=0.05$ Es una prueba de dos colas para una media poblacional con una muestra pequeña



Grados de libertad **Prueba de dos colas con $\alpha=0.05$**

$$\vartheta = n-1 = 9-1 = 8$$

CALCULAR EL ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$t_{calc} = \frac{\overline{X}-\mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} \Rightarrow t_{calc} = \frac{12.24-12}{\frac{0.6}{\sqrt{9}}} \Rightarrow \qquad t_{calc} = 1.2t$$

FORMULAR UNA DECISIÓN

$$-t_{tabla} \le t_{calculado} \le +t_{tabla}$$

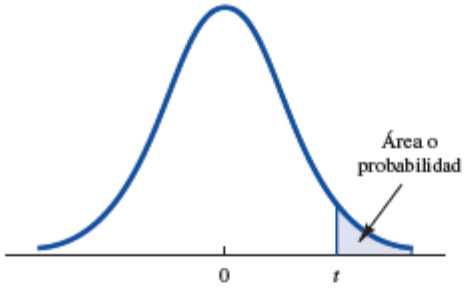
Se acepta H_0 , de lo contrario se rechaza H_0 y se acepta H_1 .

Como $-2.306 \le 1.2 \le +2.306$ Se acepta H_0

TOMAR UNA DECISIÓN

$-2.306 \leq 1.2 \leq +2.306$ **Cae en la región de no rechazo de la hipótesis nula H_0** → Se acepta **H_0**

Conclusión: A un nivel de significación de 0.05 se comprobó que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de que el precio promedio de los paquetes de cereal de 12 Kg. Por lo tanto, la diferencia con respecto al valor del estadístico muestral pudiera deberse al azar por el muestreo realizado o al tamaño de la muestra.



Las entradas que aparecen en la tabla dan los valores de t correspondientes a un área o probabilidad en la cola superior de la distribución t. Por ejemplo, para 10 grados de libertad y un área de 0.05 en la cola superior, $t_{0.05} = 1.812$.

Grados de libertad	Área en la cola superior					
	0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756

$$\vartheta = n - 1 = 9 - 1 = 8$$

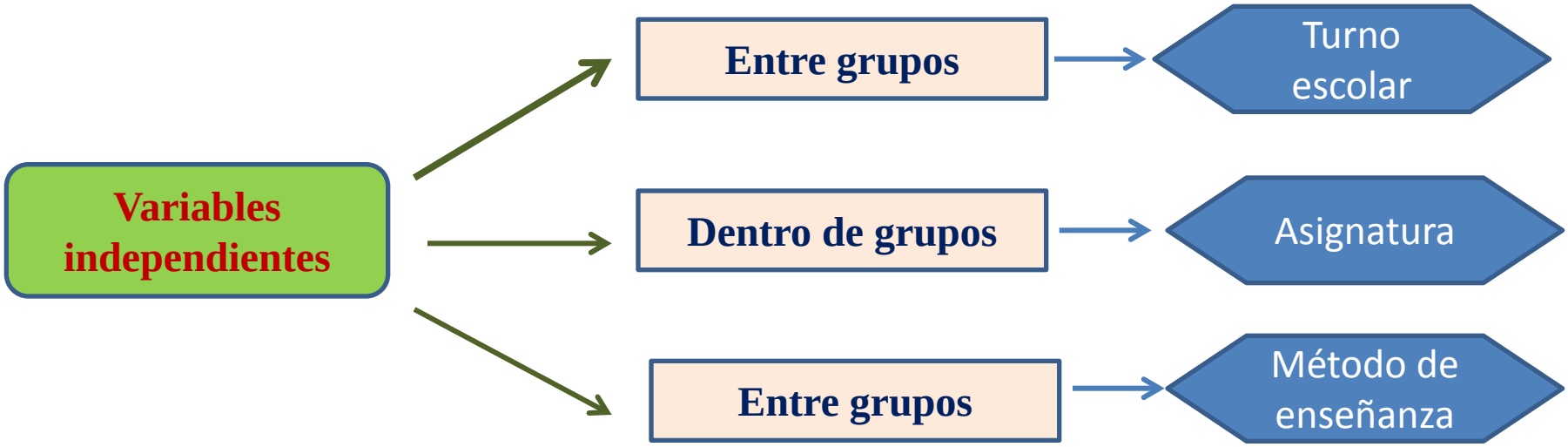
En cualquier libro de estadística, estas tablas se encuentran al final de los mismos. Para nuestros ejemplos he tomado una fotografía de la región de interés.

Ejercicio: Un docente integrador de la unidad educativa “Pasado pasadito” preocupado por el aprendizaje de sus alumnos decide abordar cierta investigación indicándoles a sus docentes especialistas de física, química y matemática, que para el siguiente lapso explicaran y evaluaran el contenido de sus asignaturas de dos forma: en primer lugar con sus métodos tradicionales y luego con un método innovador.

Para el análisis estadístico de la investigación se selecciona una muestra de doce estudiantes con las siguientes características: se analizó una variable cualitativa como el turno en el cual se reciben las clases y seis variables cuantitativas como lo son el rendimiento académico en las tres asignaturas y las metodologías de enseñanza.

El estudio consiste en verificar la efectividad de los dos métodos de enseñanza (tradicional y el innovador). Se pueden estudiar diversas situaciones según el enfoque que se le den a las variables

De acuerdo a las hipótesis de investigación se recurrirá a una o mas variables independientes que explicaran a la variable dependiente “rendimiento académico”



Rendimiento académico según los métodos

Matemática		Método tradicional			Método Innovador		
Caso	Turno	Física	Química	Matemática	Física	Química	Matemática
1	mañana	14	13	14	15	15	17
2	mañana	07	06	05	10	08	10
3	mañana	10	08	07	12	13	09
4	mañana	10	09	10	13	10	13
5	Tarde	15	14	14	17	16	17
6	Tarde	03	04	02	08	09	07
7	Tarde	17	18	19	19	20	20
8	Tarde	11	12	14	14	17	18
9	Noche	05	04	03	07	10	09
10	Noche	13	13	15	14	16	19
11	Noche	10	12	14	12	14	15
12	Noche	11	14	13	16	18	17

Prueba de una media poblacional

Permite comprobar si la media aritmética de una muestra pertenece a una población con cierta media poblacional.

Ejemplo (Aplicación)

Comprobar para la variable física del método tradicional si pertenece a una población con una media aritmética de 11 Puntos. Utilice un nivel de significación de 5%

PLANTEAR LAS HIPÓTESIS

H_0 : **La media poblacional de la asignatura física con el método tradicional es de 11 puntos**

H_1 : **La media poblacional de la asignatura física con el método tradicional es diferente a 11 puntos.**

H_0 : $\mu = 11$ pts

H_1 : $\mu \neq 11$ pts

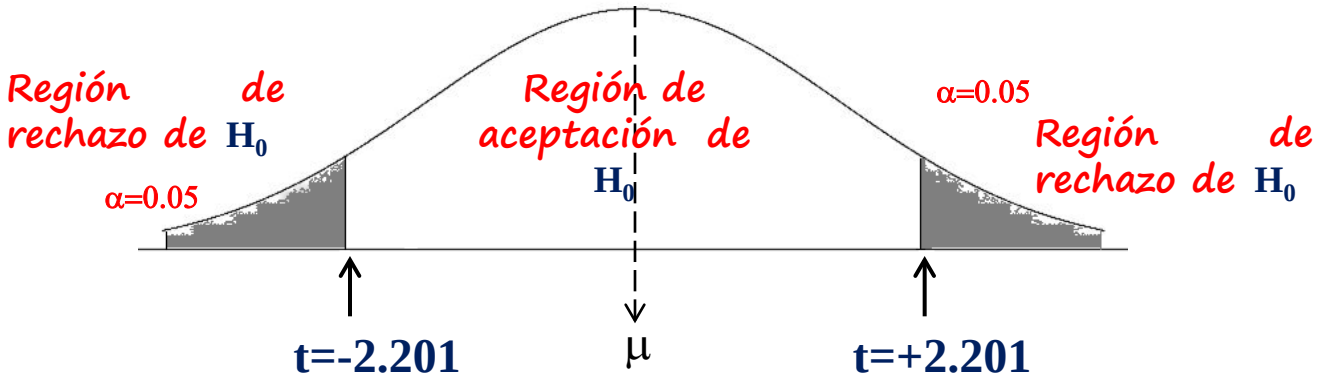
SELECCIONAR EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA

$\alpha = 0.05$ Es una prueba de dos colas para una media aritmética

Grados de libertad

$$\vartheta = n - 1 = 12 - 1 = 11$$

Prueba de dos colas con $\alpha = 0.05$



CALCULAR EL ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$t_{calc} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n-1}}} \Rightarrow t_{calc} = \frac{10.5 - 11}{\frac{4.05642}{\sqrt{12-1}}} \Rightarrow \qquad t_{calc} = -0.408811$$

También se puede emplear la ecuación

$$t_{calc} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \text{donde} \quad s = \hat{s}\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

FORMULAR REGLA DE DECISIÓN

Si $-t_{tabla} \leq t_{calculado} \leq +t_{tabla}$ Se acepta **H_0** , de lo contrario se rechaza **H_0** y se acepta **H_1**.

TOMAR UNA DECISIÓN

Como $-2.201 \leq -0.408811 \leq +2.201$ Se acepta **H_0**

Este valor cae en la zona de aceptación de la hipótesis nula, **H_0** .

Conclusión: Se debe aceptar la hipótesis nula , es decir, que la muestra con una media de 10.5 si se extrajo de una población cuya media o rendimiento académico promedio es de 11 puntos. El docente integrador junto con el docente especialista tomaran las medidas pertinentes de acuerdo con este resultado.

Relación entre estimación por intervalo y prueba de hipótesis

Previamente

En el caso en que **σ** es conocida, la estimación de la media poblacional mediante un intervalo de (1 -α)% de confianza está dada por

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para una prueba de hipótesis de dos colas para la media poblacional tiene la forma:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

El procedimiento para usar un intervalo de confianza para una prueba de hipótesis de dos colas se resume como se indica a continuación.

MÉTODO DEL INTERVALO DE CONFIANZA PARA PROBAR UNA HIPÓTESIS DE LA FORMA

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

1. Seleccionar de la población una muestra aleatoria simple y emplear el valor de la media muestral $\bar{x}$ para obtener un intervalo de confianza para la media poblacional μ.

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. Si el intervalo de confianza contiene el valor hipotético μ_0, *no se rechaza* H_0. *Si no* es así, se rechaza H_0.

La prueba de hipótesis de MaxFlight tiene la forma siguiente:

$$H_0 : \mu = 295$$
$$H_1 : \mu \neq 295$$

Para probar esta hipótesis con un nivel de confianza α=0.05, se tomó una muestra de 50 pelotas de golf y se halló una distancia media muestral de $\bar{x} = 297.6m$. La desviación estándar poblacional es $\sigma = 12$.

Lo vimos en clases

Intervalo de confianza $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

De acuerdo a la tabla

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

$$297.6 \pm 1.96 \frac{12}{\sqrt{50}}$$

$$297.6 \pm 3.3 \qquad [294.6,\ 300.9]$$

con 95% de confianza la distancia media para la población de pelotas de golf está entre 294.3 y 300.9 metros.

Como el valor hipotético de la media poblacional es μ_0 =295, está en dicho intervalo.

conclusión de la prueba de hipótesis: No se puede rechazar la hipótesis nula, $H_0 : \mu = 295$