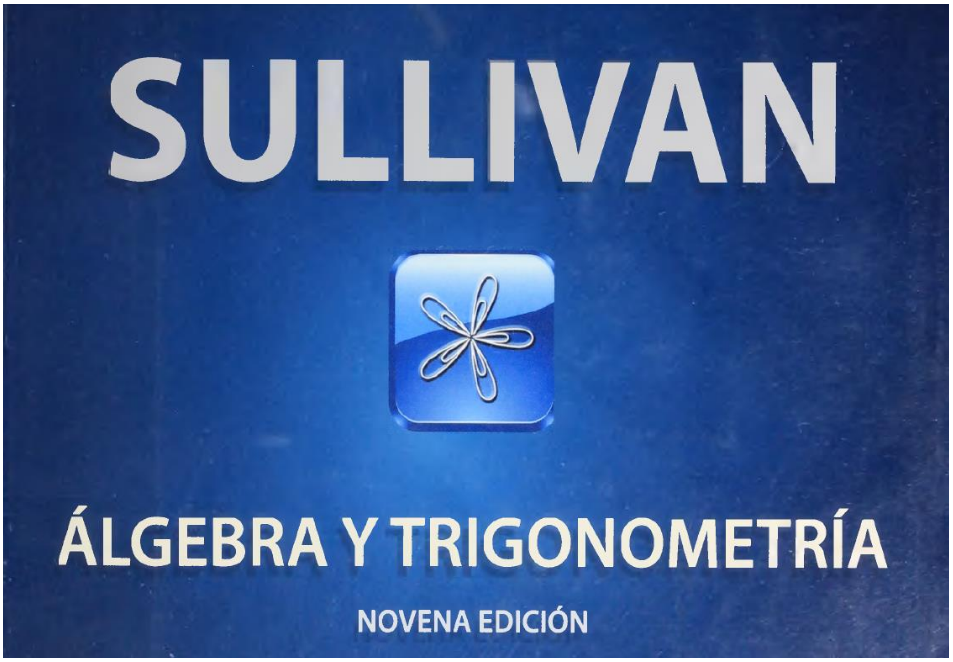



# II parcial – Funciones Trigonométricas

| $\theta$ (Radianes) | $\theta$ (Grados) | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tan $\theta$ | csc $\theta$ | sec $\theta$ | cot $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{6}$ | 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## Ejercicios

**5.** Escribe el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas de 45°.

**6.** Escribe el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas de 30° y 60°.

*En los problemas 7–16, $f(\theta) = \text{sen}\,\theta$ y $g(\theta) = \cos\theta$. Determina el valor exacto de cada expresión si $\theta = 60°$. No uses una calculadora.*

**7.** $f(\theta)$ **8.** $g(\theta)$ **9.** $f\left(\frac{\theta}{2}\right)$ **10.** $g\left(\frac{\theta}{2}\right)$ **11.** $[f(\theta)]^2$

**12.** $[g(\theta)]^2$ **13.** $2f(\theta)$ **14.** $2g(\theta)$ **15.** $\frac{f(\theta)}{2}$ **16.** $\frac{g(\theta)}{2}$

*En los problemas 17–28, determina el valor exacto de cada expresión. No uses una calculadora.*

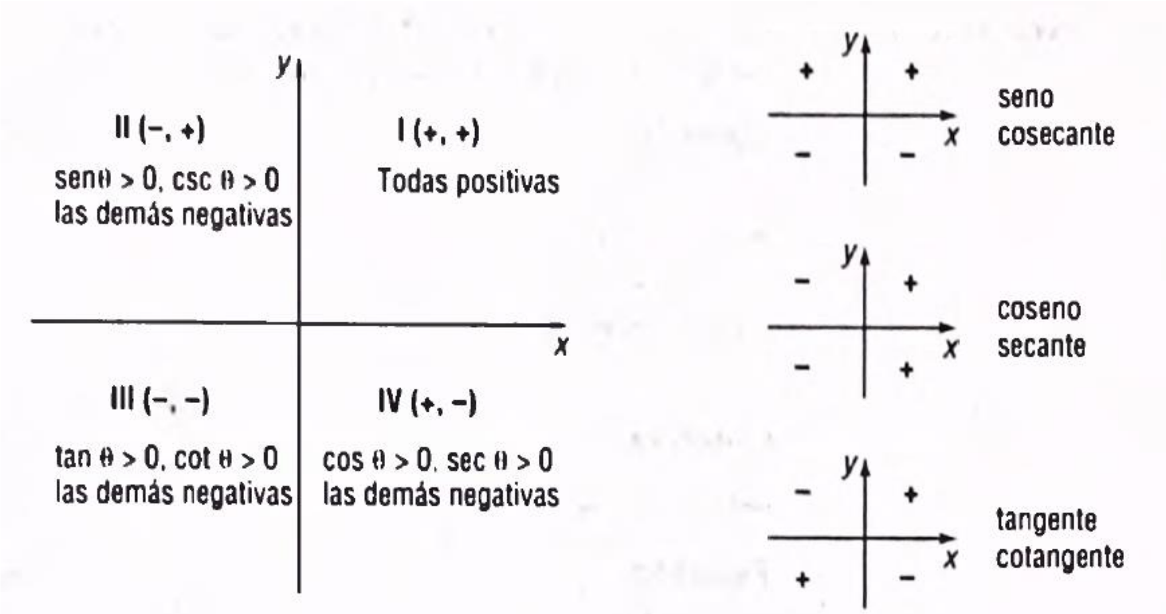
**17.** $4\cos 45° - 2\,\text{sen}\,45°$ **18.** $2\,\text{sen}\,45° + 4\cos 30°$ **19.** $6\tan 45° - 8\cos 60°$

**20.** $\text{sen}\,30° \cdot \tan 60°$ **21.** $\sec\frac{\pi}{4} + 2\csc\frac{\pi}{3}$ **22.** $\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}$

**23.** $\sec^2\frac{\pi}{6} - 4$ **24.** $4 + \tan^2\frac{\pi}{3}$ **25.** $\text{sen}^2\,30° + \cos^2 60°$

**26.** $\sec^2 60° - \tan^2 45°$ **27.** $1 - \cos^2 30° - \cos^2 60°$ **28.** $1 + \tan^2 30° - \csc^2 45°$

| Cuadrante de $\theta$ | sen$\theta$, csc $\theta$ | cos $\theta$, sec $\theta$ | tan $\theta$, cot $\theta$ |
|---|---|---|---|
| I | Positivo | Positivo | Positivo |
| II | Positivo | Negativo | Negativo |
| III | Negativo | Negativo | Positivo |
| IV | Negativo | Positivo | Negativo |




(a) (b)

## FUNCINES TRIGONOMÉTRICAS

Como queremos representar funciones trigonométricas en el plano $xy$, usaremos los símbolos tradicionales de $x$ para la variable independiente (o argumento) y $y$ para la variable dependiente (o valor en $x$) para cada función. Así que escribimos las seis funciones trigonométricas como

$$y = f(x) = \operatorname{sen} x \qquad y = f(x) = \cos x \qquad y = f(x) = \tan x$$
$$y = f(x) = \csc x \qquad y = f(x) = \sec x \qquad y = f(x) = \cot x$$

Aquí la variable independiente $x$ representa un ángulo, medido en radianes. En cálculo, $x$ generalmente se toma como un número real. Como dijimos anteriormente, estas son formas equivalentes de ver a $x$.

**Definición:**

Una función $f$ es **periódica** si existe un número positivo $p$ tal que, cuando $\theta$ esté en el dominio de $f$, $\theta + p$ también lo estarán y

$$\boxed{f(\theta + p) = f(\theta)}$$

Si existe un número más pequeño $p$, a este valor más pequeño se le llama **periodo (fundamental)** de $f$.

**Propiedades periódicas**

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta & \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta & \tan(\theta + \pi) = \tan\theta \\ \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta & \sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta & \cot(\theta + \pi) = \cot\theta \end{array}$$

**Teorema:**

**Propiedades pares–impares**

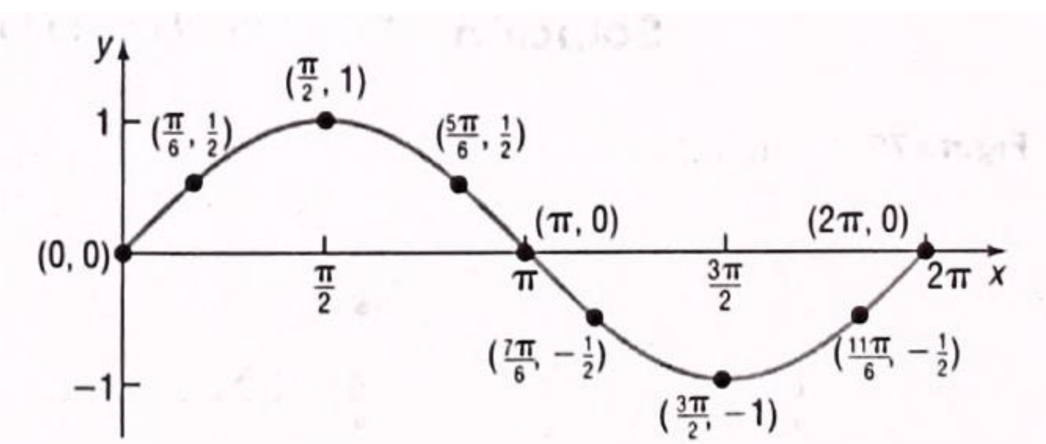
$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta & \cos(-\theta) = \cos\theta & \tan(-\theta) = -\tan\theta \\ \csc(-\theta) = -\csc\theta & \sec(-\theta) = \sec\theta & \cot(-\theta) = -\cot\theta \end{array}$$

## GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

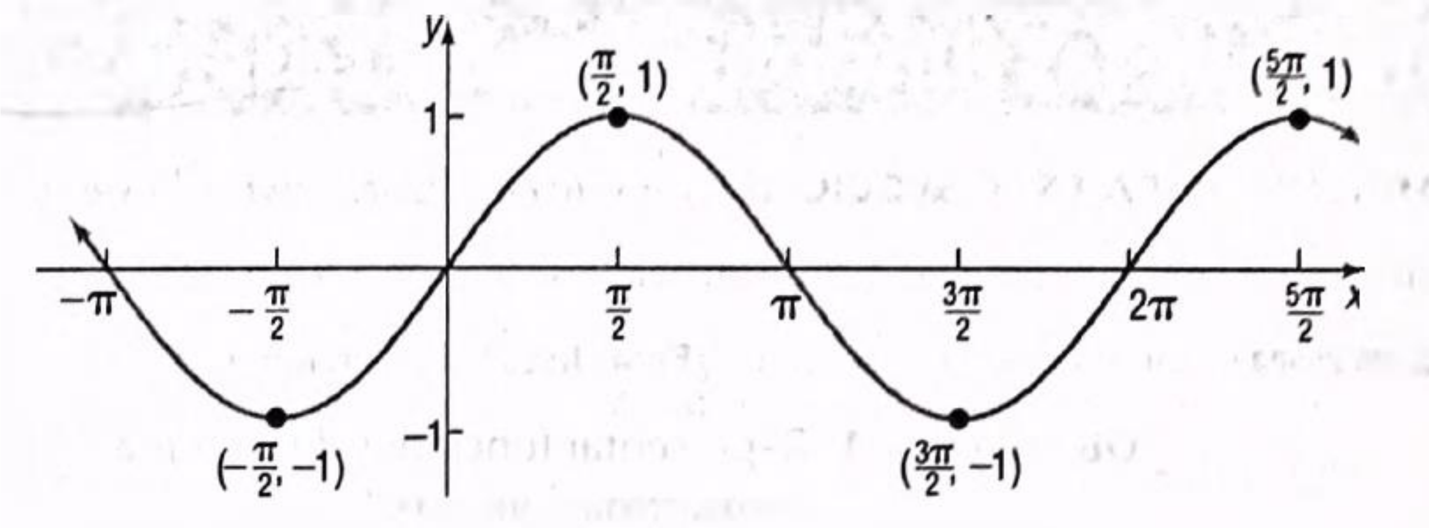
### La gráfica de la función seno $y = \operatorname{sen} x$

Como la función seno tiene periodo $2\pi$, solo tenemos que hacer la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. El resto de la gráfica consistirá en repeticiones de esta porción de la figura.

$$y = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq 2\pi$$



$y = \text{sen}\,x, -\infty < x < \infty$

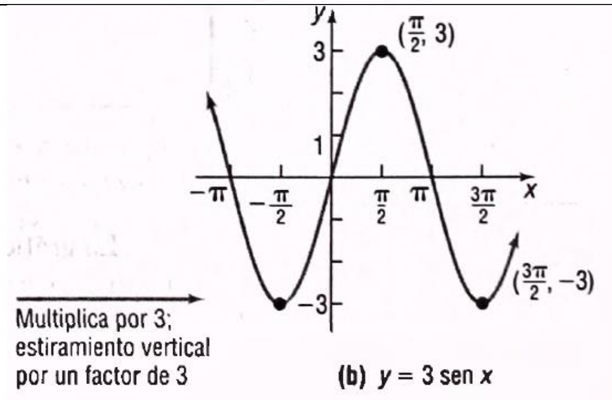
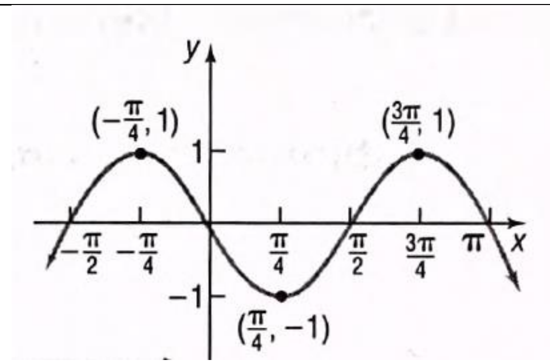



**Propiedades de la función seno $y = \text{sen}\,x$**

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consiste en todos los números reales de $-1$ a $1$, incluidos.
3. La función seno es una función impar, como indica la simetría con respecto al origen de la gráfica.
4. La función seno es periódica, con periodo $2\pi$.
5. Las intersecciones en $x$ son $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intersección en $y$ es $0$.
6. El valor máximo es $1$ y se da en $x = \ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$; el valor mínimo es $-1$ y se da en $x = \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$.

# Gráfica de las funciones de la forma $y = A\,\text{sen}(\omega x)$ usando transformaciones

**Ejemplos:**

| $y = 3\text{sen}x$ | $y = -\text{sen}(2x)$ |
|---|---|
|  |  |

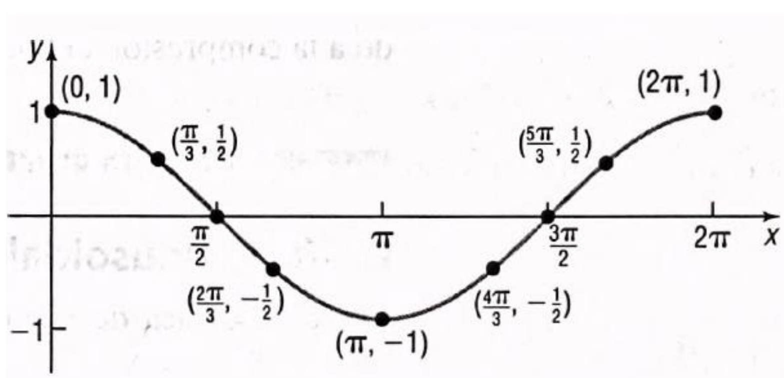




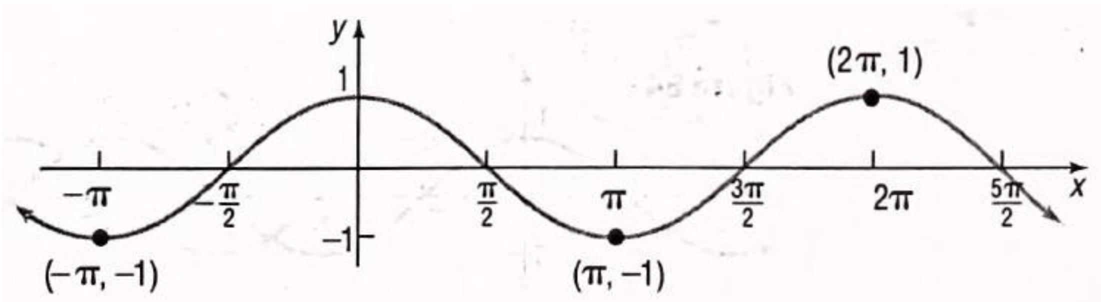
## Gráfica de la función coseno

Como la función coseno tiene periodo $2\pi$. Procederemos de la misma forma que como lo hicimos con la función seno, construyendo la tabla 8, la cual, da una lista de algunos puntos en la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Como muestra la tabla, la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ comienza en el punto $(0, 1)$. Conforme $x$ crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$ a $\pi$, el valor de $y$ decrece de 1 a 0 a $-1$; conforme $x$ crece de $\pi$ a $\frac{3\pi}{2}$ a $2\pi$, el valor de $y$ crece de $-1$ a 0 a 1. Como anteriormente, trazamos los puntos de la tabla 8 para obtener un periodo o ciclo de la gráfica. Ver figura 81.

**Figura 81**
$y = \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$



$$y = \cos x, -\infty < x < \infty$$

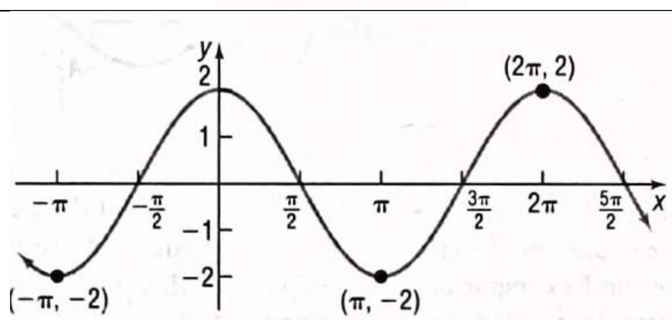
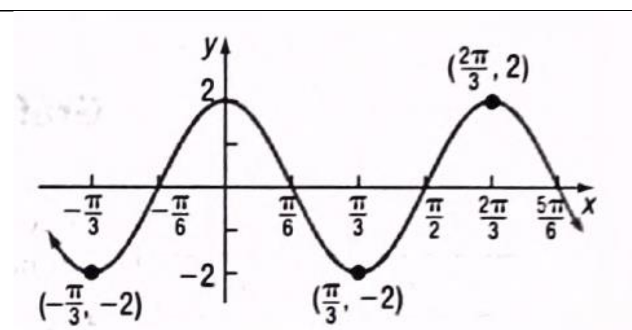



**Propiedades de la función coseno**

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consiste en todos los números reales de $-1$ a $1$, incluidos.
3. La función coseno es una función par, como indica la simetría con respecto al eje $y$ de la gráfica.
4. La función coseno es periódica, con periodo $2\pi$.
5. Las intersecciones en $x$ son $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$; la intersección en $y$ es 1.
6. El valor máximo es 1 y se da en $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$; el valor mínimo es $-1$ y se da en $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$.

## Gráfica de funciones de la forma $y = A\cos(\omega x)$ usando transformaciones

**Ejemplo:**

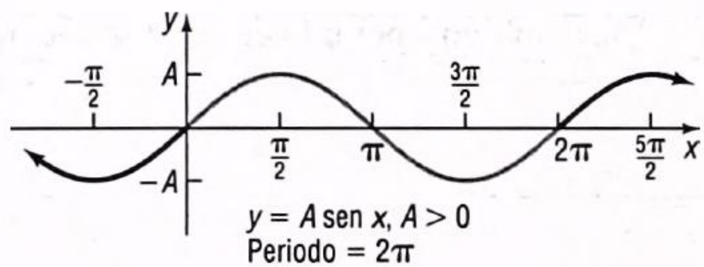
| $y = 2\cos x$ | $y = 2\cos(3x)$ |
|---|---|
|  |  |

En general, los valores de las funciones $y = A$ sen $x$ y $y = A \cos x$, donde $A \neq 0$, siempre satisfacen las desigualdades

$$-|A| \leq A \operatorname{sen} x \leq |A| \quad \text{y} \quad -|A| \leq A \cos x \leq |A|$$

respectivamente. El número $|A|$ se llama la **amplitud** de $y =$ sen $x$ o $y = \cos x$. Ver figura 86.

**Figura 86**




**TEOREMA** Si $\omega > 0$, la amplitud y periodo de $y = A$ sen$(\omega x)$ y $y = A\cos(\omega x)$ están dadas por

$$\boxed{\text{Amplitud} = |A| \quad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1)}$$

**EJEMPLO 4** **Determinar la amplitud y el periodo de una función sinusoidal**

Determina la amplitud y el periodo de $y = 3$ sen$(4x)$.

**Solución** Si comparamos $y = 3$ sen$(4x)$ con $y = A$ sen$(\omega x)$, determinamos que $A = 3$ y $\omega = 4$. De la ecuación (1),

$$\text{Amplitud} = |A| = 3 \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

## RESUMEN Pasos para construir una gráfica de una función sinusoidal de la forma $y = A$ sen$(\omega x)$ o $y = A \cos(\omega x)$ usando puntos clave

**Paso 1:** Determina la amplitud y el periodo de la función sinusoidal.

**Paso 2:** Divide el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ en cuatro subintervalos de la misma longitud.

**Paso 3:** Usa los puntos terminales de estos subintervalos para obtener cinco puntos clave en la gráfica.

**Paso 4:** Traza los cinco puntos y dibuja una curva sinusoidal para obtener la gráfica de un ciclo. Extiende la curva en cada dirección para que esté completa.

**Solución** Como la función seno es impar, podemos usar la forma equivalente:

$$y = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

**Paso 1:** Si comparamos $y = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ con $y = A\ \mathrm{sen}(\omega x)$, encontramos que $A = -2$ y $\omega = \frac{\pi}{2}$. La amplitud es $|A| = |-2| = 2$ y el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

La gráfica de $y = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ estará entre $-2$ y $2$ en el eje $y$. Un ciclo empezará en $x = 0$ y terminará en $x = 4$.

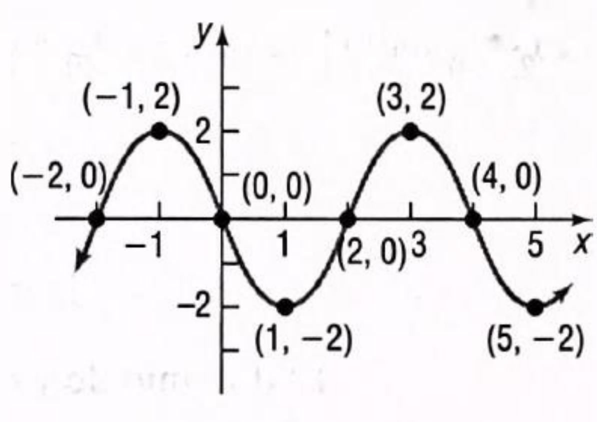
**Paso 2:** Divide el intervalo $[0, 4]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $4 \div 4 = 1$. Las coordenadas $x$ de los cinco puntos clave son

| $0$ | $0 + 1 = 1$ | $1 + 1 = 2$ | $2 + 1 = 3$ | $3 + 1 = 4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1a coordenada x | 2a coordenada x | 3a coordenada x | 4a coordenada x | 5a coordenada x |

**Paso 3:** Como $y = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, multiplica las coordenadas $y$ de los cinco puntos clave, en la figura 89(a), por $A = -2$. Los cinco puntos clave en la gráfica son

$$(0, 0) \qquad (1, -2) \qquad (2, 0) \qquad (3, 2) \qquad (4, 0)$$

**Paso 4:** Traza estos cinco puntos y llena la gráfica de la función seno como se muestra en la figura 91(a). Si extendemos la curva en cada dirección obtenemos la figura 91(b).




**(b)** $y = 2\ \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$

# EJERCCICIOS

61. ¿Cuál es el dominio de la función seno?

62. ¿Cuál es el dominio de la función coseno?

63. ¿Para qué números $\theta$, no está definida $f(\theta) = \tan \theta$?

64. ¿Para qué números $\theta$, no está definida $f(\theta) = \cot \theta$?

65. ¿Para qué números $\theta$, no está definida $f(\theta) = \sec \theta$?

66. ¿Para qué números $\theta$, no está definida $f(\theta) = \csc \theta$?

67. ¿Cuál es el rango de la función seno?

68. ¿Cuál es el rango de la función coseno?

69. ¿Cuál es el rango de la función tangente?

70. ¿Cuál es el rango de la función cotangente?

71. ¿Cuál es el rango de la función secante?

72. ¿Cuál es el rango de la función cosecante?

73. La función seno, ¿es par, impar o ninguna de las dos? ¿Su gráfica es simétrica? ¿Con respecto a qué?

74. La función coseno, ¿es par, impar o ninguna de las dos? ¿Su gráfica es simétrica? ¿Con respecto a qué?

# PAG 572

10. $g(x) = \cos x$
   - (a) ¿Cuál es la intersección en $y$ de la gráfica de $g$?
   - (b) ¿Para qué números $x$, $-\pi \le x \le \pi$, es decreciente la gráfica de $g$?
   - (c) ¿Cuál es el mínimo absoluto de $g$?
   - (d) ¿Para qué números $x$, $0 \le x \le 2\pi$, es $g(x) = 0$?
   - (e) ¿Para qué números $x$, $-2\pi \le x \le 2\pi$, es $g(x) = 1$? ¿Dónde es $g(x) = -1$?
   - (f) ¿Para qué números $x$, $-2\pi \le x \le 2\pi$, es $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$?
   - (g) ¿Cuáles son las intersecciones en $x$ de $g$?

*En los problemas 11–20, determina la amplitud y el periodo de cada función sin hacer su gráfica.*

11. $y = 2\,\text{sen}\,x$

12. $y = 3\cos x$

13. $y = -4\cos(2x)$

14. $y = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

15. $y = 6\,\text{sen}(\pi x)$

16. $y = -3\cos(3x)$

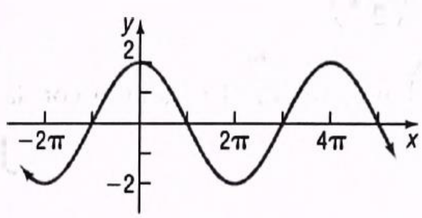
17. $y = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$

18. $y = \frac{4}{3}\text{sen}\left(\frac{2}{3}x\right)$

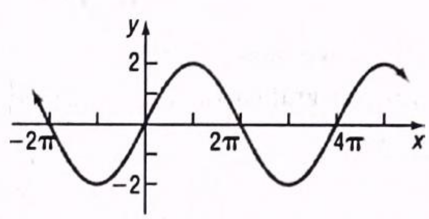
19. $y = \frac{5}{3}\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}x\right)$

20. $y = \frac{9}{5}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}x\right)$

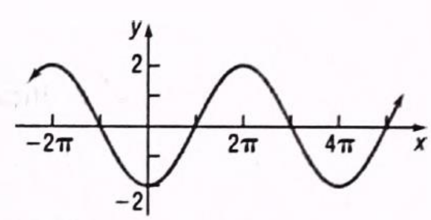
*En los problemas 21–30, asocia la función dada con una de las gráficas en los incisos (A)–(J).*



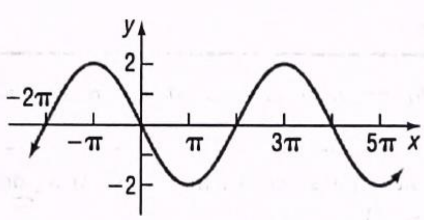
(A)



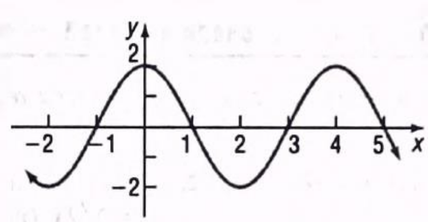
(B)



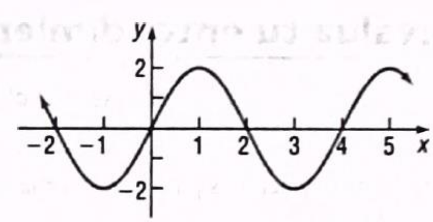
(C)



(D)

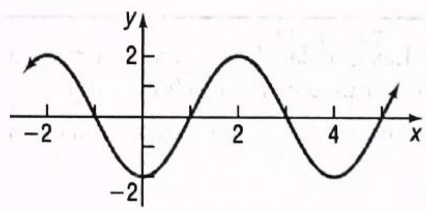


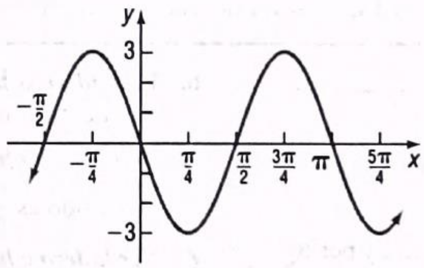
(E)

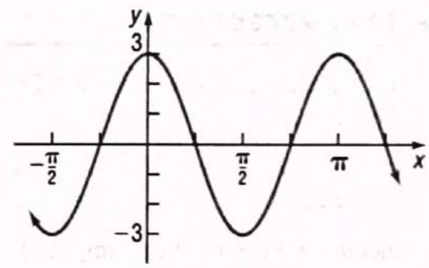


(F)

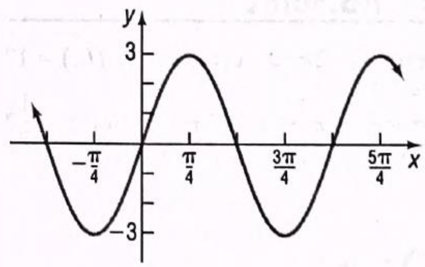
(D) (E) (F)




(G) (H) (I)




**21.** $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ **22.** $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ **23.** $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

**24.** $y = 3\cos(2x)$ **25.** $y = -3\,\text{sen}(2x)$ **26.** $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

**27.** $y = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ **28.** $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ **29.** $y = 3\,\text{sen}(2x)$

**30.** $y = -2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

(J)

*En los problemas 35–58, traza la gráfica de cada función. Asegúrate de marcar los puntos clave y mostrar por lo menos dos ciclos. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de cada función.*

**35.** $y = 4\cos x$ **36.** $y = 3\,\text{sen}\,x$ **37.** $y = -4\,\text{sen}\,x$ **38.** $y = -3\cos x$

**39.** $y = \cos(4x)$ **40.** $y = \text{sen}(3x)$ **41.** $y = \text{sen}(-2x)$ **42.** $y = \cos(-2x)$

**43.** $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **44.** $y = 2\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$ **45.** $y = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ **46.** $y = -4\,\text{sen}\left(\frac{1}{8}x\right)$

**47.** $y = 2\,\text{sen}\,x + 3$ **48.** $y = 3\cos x + 2$ **49.** $y = 5\cos(\pi x) - 3$ **50.** $y = 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$

**51.** $y = -6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 4$ **52.** $y = -3\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2$ **53.** $y = 5 - 3\,\text{sen}(2x)$ **54.** $y = 2 - 4\cos(3x)$

**55.** $y = \frac{5}{3}\,\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}x\right)$ **56.** $y = \frac{9}{5}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}x\right)$ **57.** $y = -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \frac{1}{2}$ **58.** $y = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}x\right) + \frac{3}{2}$

*En los problemas 59–62, escribe la ecuación de una función seno que tenga las características que se dan.*

**59.** Amplitud: 3 Periodo: $\pi$ **60.** Amplitud: 2 Periodo: $4\pi$ **61.** Amplitud: 3 Periodo: 2 **62.** Amplitud: 4 Periodo: 1

## La gráfica de la función tangente

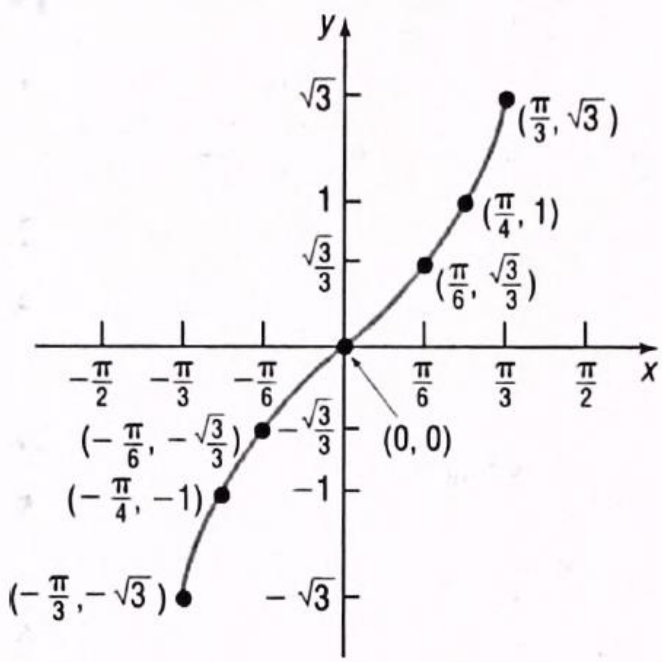
Como la función tangente tiene periodo $\pi$, solo necesitamos determinar la gráfica sobre un intervalo de longitud $\pi$. El resto de la gráfica consistirá en repeticiones de esa curva. Como la función tangente no está definida en $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ nos enfocaremos en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, de longitud $\pi$, para construir la tabla 9, la cual, enlista algunos puntos en la gráfica de $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Trazamos los puntos de la tabla y los conectamos con una curva suave. Observa la figura 95 para una gráfica parcial de $y = \tan x$, donde $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Para completar un periodo de la gráfica de $y = \tan x$, debemos investigar el comportamiento de la función conforme $x$ se acerca a $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Sin embargo, debemos tener cuidado porque $y = \tan x$ no está definida en estos números. Para determinar este comportamiento, usaremos la identidad

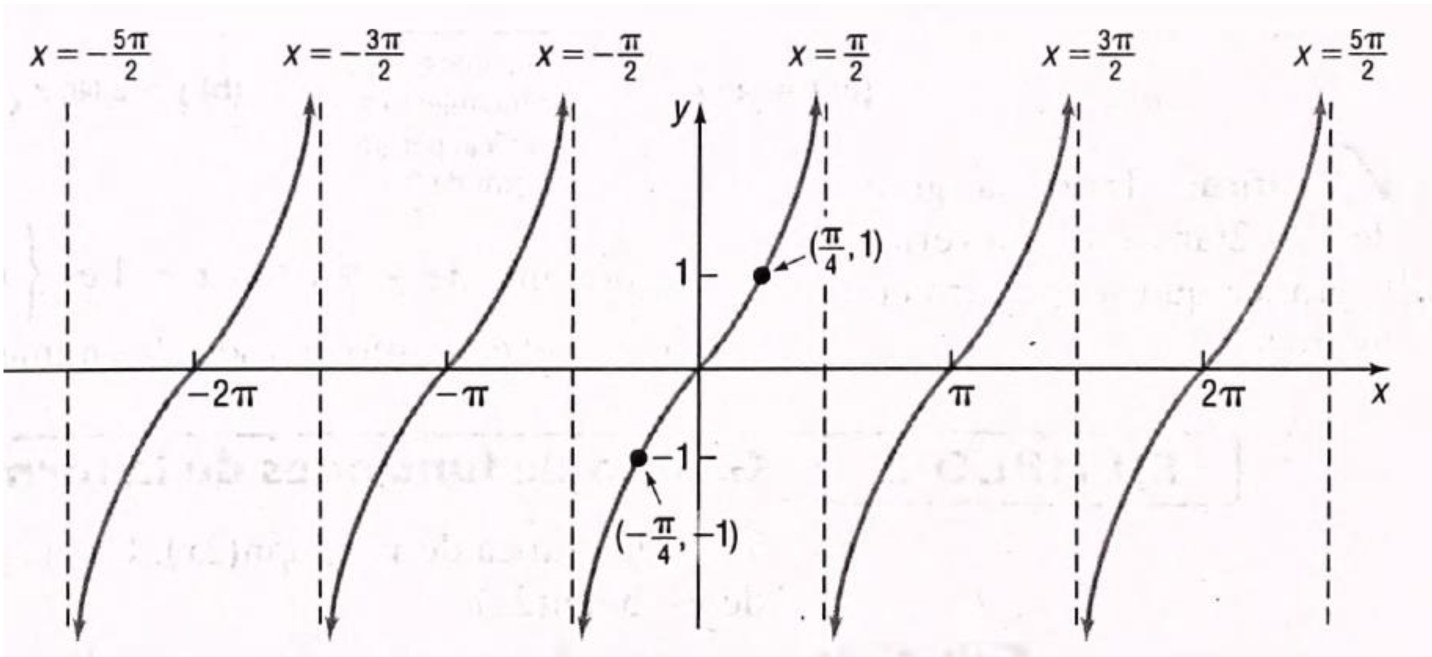
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

**Figura 95**

$y = \tan x, -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$



$y = \tan x, -\infty < x < \infty, x$ diferente de los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, $-\infty < y < \infty$



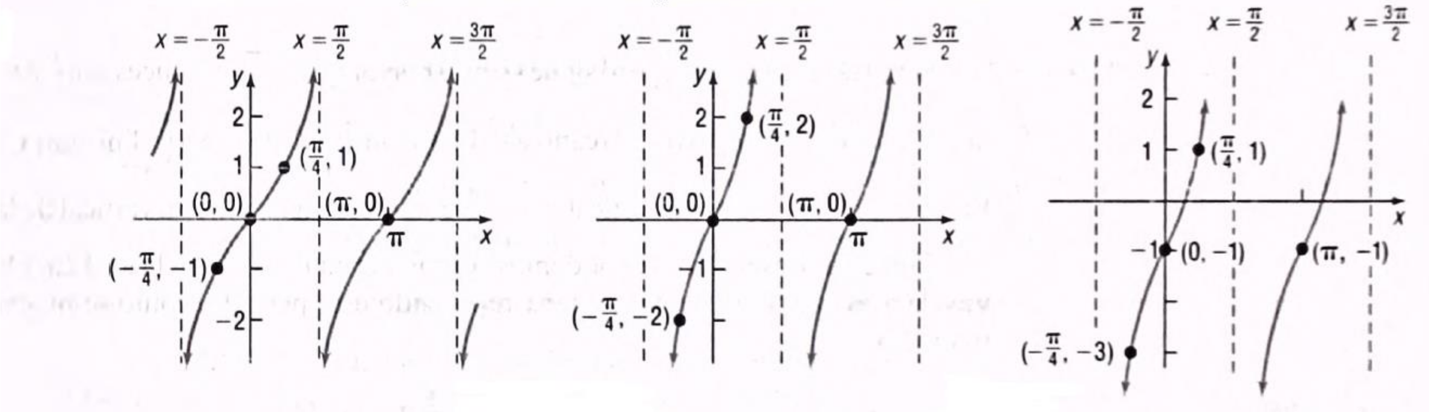

**Propiedades de la función tangente**

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
2. El rango es el conjunto de todos los números reales.
3. La función tangente es una función impar, como indica la simetría con respecto al origen de la gráfica.
4. La función tangente es periódica, con periodo $\pi$.
5. Las intersecciones en $x$ son..., $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intersección en $y$ es 0.
6. Las asíntotas verticales se dan en $x = \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$.

**EJEMPLO 1** **Gráfica de funciones de la forma $y = A\tan(\omega x) + B$**

Traza la gráfica de: $y = 2\tan x - 1$. Usa la gráfica para determinar el dominio y el rango de $y = 2\tan x - 1$.

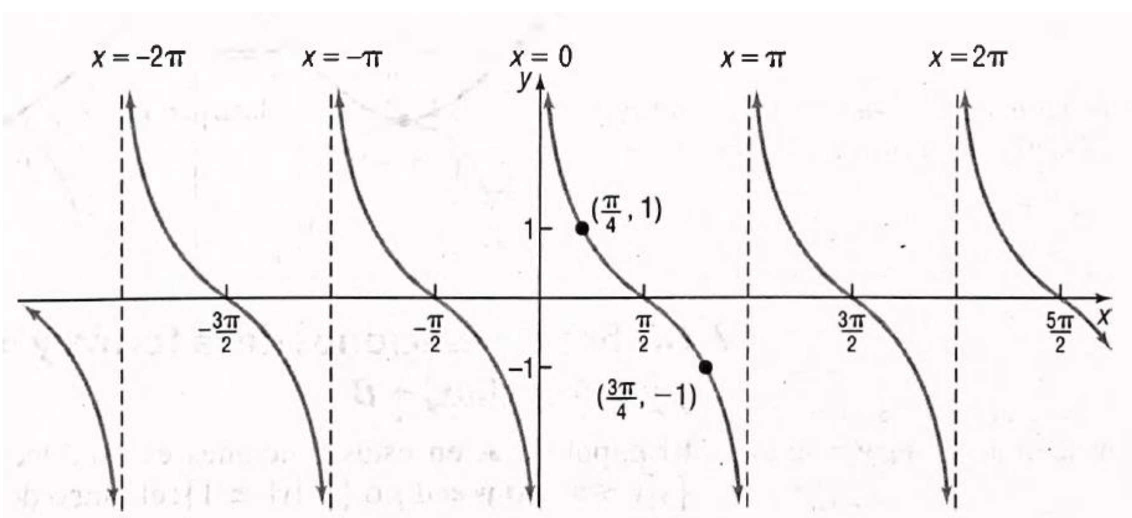
**Solución** La figura muestra los pasos usando transformaciones.




(a) $y = \tan x$ (b) $y = 2\tan x$ (c) $y = 2\tan x - 1$

## La gráfica de la función cotangente

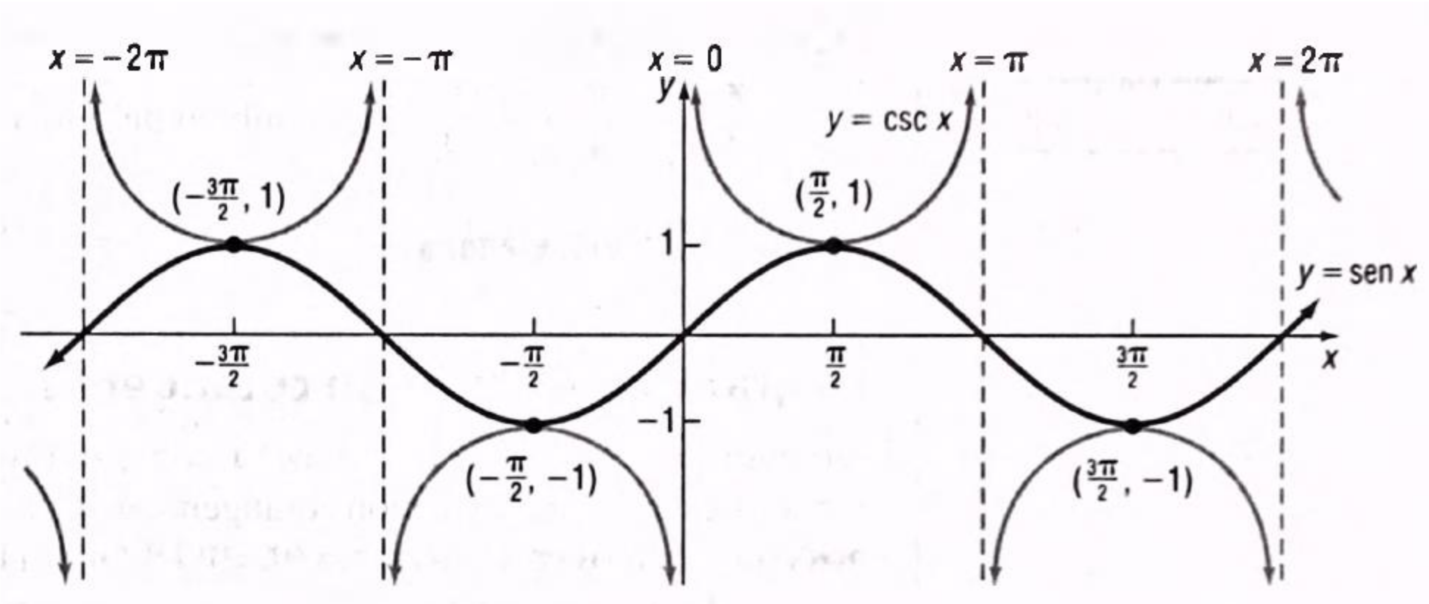
Obtendremos la gráfica de $y = \cot x$ como obtuvimos la de $y = \tan x$. El periodo de $y = \cot x$ es $\pi$. Como la función cotangente no está definida para múltiplos enteros de $\pi$, nos enfocaremos en el intervalo $(0, \pi)$. La tabla 11 enlista algunos puntos en la gráfica de $y = \cot x$, $0 < x < \pi$. Conforme $x$ se acerca a 0, pero sigue siendo mayor que 0, el valor de $\cos x$ se acercará a 1 y el valor de $\operatorname{sen} x$ será positivo y cercano a 0. Por lo tanto, la razón $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$ será positiva y grade; así que conforme $x$ se acerque a 0, con $x > 0$, $\cot x$ se acerca a $\infty$ ($\lim_{x\to 0^+} \cot x = \infty$). De manera similar, conforme $x$ se acerca a $\pi$, pero sigue siendo menor que $\pi$, el valor de $\cos x$ estará cerca de $-1$ y el valor de $\operatorname{sen} x$ será positivo y cercano a 0. Por lo tanto, la razón $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$ será negativa y se acercará a $-\infty$ conforme $x$ se acerca a $\pi$ ($\lim_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty$). La figura 99 muestra la gráfica.

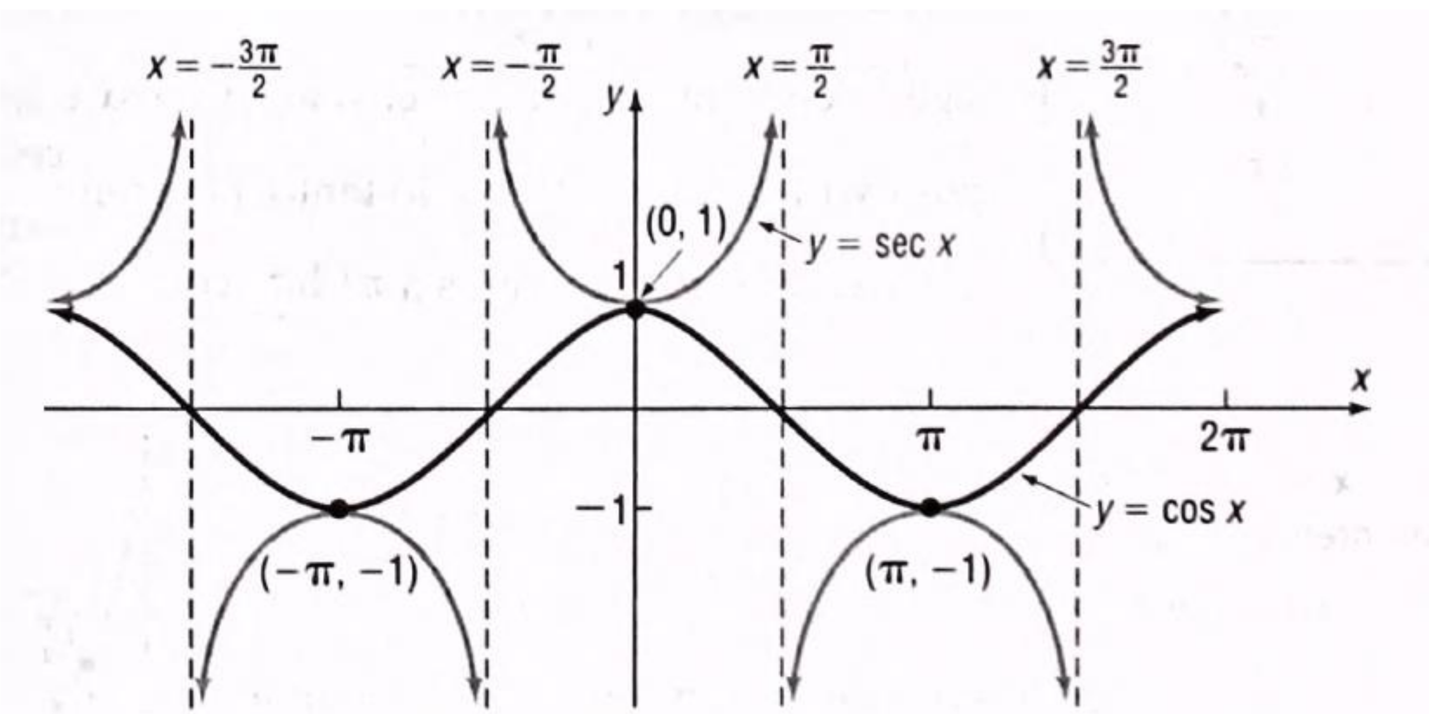


## Las gráficas de las funciones secante y cosecante

Las funciones secante y cosecante, a las que algunas veces se refieren como **funciones recíprocas**, se representan gráficamente haciendo uso de las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$



Ahora estudiaremos la gráfica de

$$y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$$

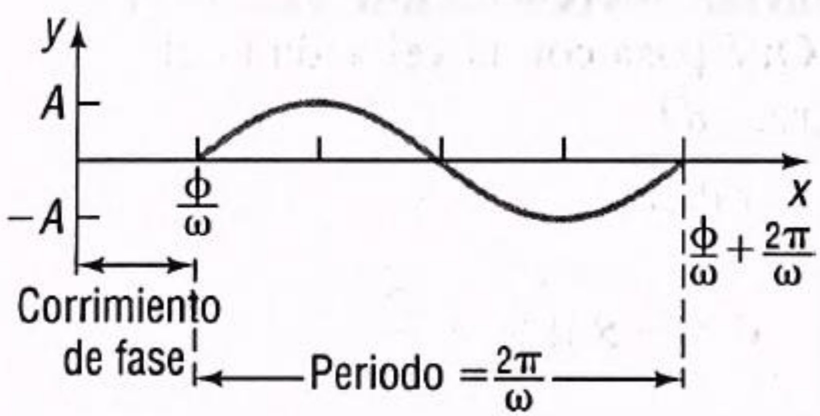
que se puede escribir como

$$y = A\ \text{sen}\left[\omega\left(x - \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

Para las gráficas de $y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$ o $y = A\cos(\omega x - \phi)$, $\omega > 0$,

| | | |
|---|---|---|
| Amplitud $= \lvert A \rvert$ | Periodo $= T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ | Corrimiento de fase $= \dfrac{\phi}{\omega}$ |

El corrimiento de fase es a la izquierda si $\phi < 0$ y a la derecha si $\phi > 0$.




**EJEMPLO 1** **Determinar la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de una función sinusoidal y trazar su gráfica**

Determina la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de $y = 3\ \text{sen}(2x - \pi)$ y traza la gráfica de la función.

**Solución** Usaremos los mismos cuatro pasos que usamos para trazar la gráfica de funciones sinusoidales de la forma $y = A\ \text{sen}(\omega x)$ o $y = A\ \cos(\omega x)$ que se dieron

**Paso 1:** Si comparamos

$$y = 3\ \text{sen}(2x - \pi) = 3\ \text{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

encontramos que $A = 3$, $\omega = 2$ y $\phi = \pi$. La gráfica es una curva sinusoidal con amplitud $|A| = 3$, periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ y corrimiento de fase $= \dfrac{\phi}{\omega} = \dfrac{\pi}{2}$.

**Paso 2:** La gráfica de $y = 3\,\text{sen}(2x - \pi)$ estará entre $-3$ y $3$ en el eje $y$. Un ciclo empezará en $x = \dfrac{\phi}{\omega} = \dfrac{\pi}{2}$ y terminará en $x = \dfrac{\phi}{\omega} + \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{3\pi}{2}$.

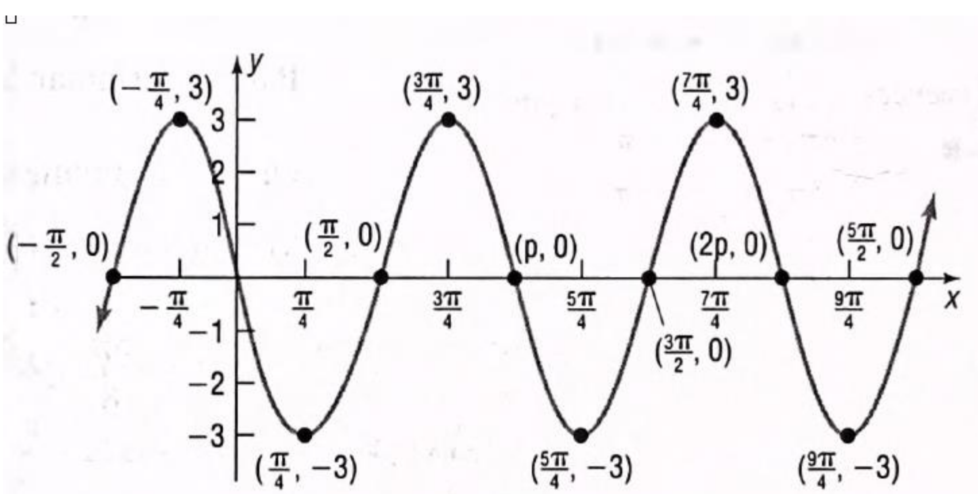
Para determinar los cinco puntos clave, divide el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ en cuatro subintervalos, cada uno de longitud $\pi \div 4 = \dfrac{\pi}{4}$, encontrando los siguientes valores de $x$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ | $\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \pi$ | $\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$ | $\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$ |
| 1a coordenada x | 2a coordenada x | 3a coordenada x | 4a coordenada x | 5a coordenada x |

**Paso 3:** Usa estos valores de $x$ para determinar los cinco puntos clave en la gráfica:

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \left(\frac{3\pi}{4}, 3\right) \quad (\pi, 0) \quad \left(\frac{5\pi}{4}, -3\right) \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

**Paso 4:** Traza estos cinco puntos



# EJERCICIOS PAG. 598

*En los problemas 47–62, traza la gráfica de cada función. Cada gráfica debe contener por lo menos dos periodos. Úsala para determinar el dominio y el rango de cada función.*

**47.** $y = 2\,\text{sen}(4x)$

**48.** $y = -3\cos(2x)$

**49.** $y = -2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

**50.** $y = 3\,\text{sen}(x - \pi)$

**51.** $y = \tan(x + \pi)$

**52.** $y = -\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

**53.** $y = -2\tan(3x)$

**54.** $y = 4\tan(2x)$

**55.** $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

**56.** $y = -4\cot(2x)$

**57.** $y = 4\sec(2x)$

**58.** $y = \csc\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

**59.** $y = 4\,\text{sen}(2x + 4) - 2$

**60.** $y = 3\cos(4x + 2)$

**61.** $y = 4\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

**62.** $y = 5\cot\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

*En los problemas 63–66, determina la amplitud y el periodo de cada función sin trazar sus gráficas.*

**63.** $y = 4\cos x$

**64.** $y = \text{sen}(2x)$

**65.** $y = -8\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

**66.** $y = -2\cos(3\pi x)$

*En los problemas 67–74, determina la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de cada función. Traza la gráfica de cada función. Muestra al menos dos periodos.*

**67.** $y = 4\,\text{sen}(3x)$

**68.** $y = 2\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right)$

**69.** $y = 2\,\text{sen}(2x - \pi)$

**70.** $y = -\cos\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

**71.** $y = \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\left(\dfrac{3}{2}x - \pi\right)$

**72.** $y = \dfrac{3}{2}\cos(6x + 3\pi)$

**73.** $y = -\dfrac{2}{3}\cos(\pi x - 6)$

**74.** $y = -7\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x - \dfrac{4}{3}\right)$

**Nota: Para cada función escribir, de existir, una ecuación que defina las asíntotas.**