EJEMPLO 8 Una forma indeterminada

El límite $\lim_{x\to 0} |x|/x$ tiene la forma indeterminada 0/0, pero, a diferencia de (7), (9) y (10), este límite no existe. Para ver por qué, analizaremos la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. Para $x \neq 0$, $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ y así reconocemos a f como la función definida por partes

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

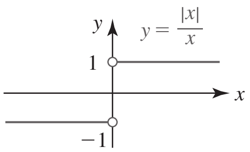


FIGURA 3.1.11 Gráfica de la función en el ejemplo 8

A partir de (11) y de la gráfica de f de la FIGURA 3.1.11 debe resultar evidente que los dos límites de f, izquierdo y derecho, existen y

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Debido a que estos límites laterales son diferentes, se concluye que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. ■

$\lim_{x\to a}$ NOTAS DESDE EL AULA

Aunque las gráficas y tablas de valores funcionales pueden ser convincentes para determinar si un límite existe o no, usted ciertamente está enterado de que todas las calculadoras y computadoras funcionan sólo con aproximaciones, y que las gráficas pueden trazarse de manera inexacta. Un uso ciego de las calculadoras también puede conducir a una conclusión falsa. Por ejemplo, se sabe que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\pi/x)$ no existe, pero a partir de los valores tabulares

$x \to 0$	± 0.1	± 0.01	± 0.001
$f(x)$	0	0	0

podría concluirse en forma natural que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$. Por otra parte, puede demostrarse que el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \tag{12}$$

existe y es igual a $\frac{1}{4}$. Vea el ejemplo 11 en la sección 3.2. Con calculadora se obtiene

$x \to 0$	± 0.00001	± 0.000001	± 0.0000001
$f(x)$	0.200000	0.000000	0.000000

El problema al calcular (12) para toda x próxima a 0 es que en forma correspondiente, $\sqrt{x^2+4}$ está muy próximo a 2. Cuando se restan dos números casi iguales en una calculadora, es posible que ocurra una pérdida de cifras significativas debido al error por redondeo.

3.1 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-14, trace la gráfica de la función para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x\to 2}(3x+2)$

2. $\lim_{x\to 2}(x^2-1)$

3. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

4. $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}$

5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x}$

7. $\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-x}{x}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}$

10. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$

11. $\lim_{x\to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ -x+3, & x \geq 0 \end{cases}$

12. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$

13. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^2-6x+8, & x > 2 \end{cases}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \sqrt{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 15-18, use la gráfica dada para encontrar el valor de cada cantidad, o concluya que no existe.

a) $f(1)$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ***c)*** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ***d)*** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

15.

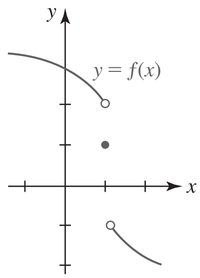


FIGURA 3.1.12 Gráfica para el problema 15

16.

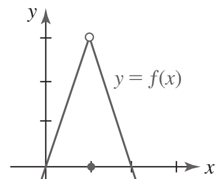


FIGURA 3.1.13 Gráfica para el problema 16

17.

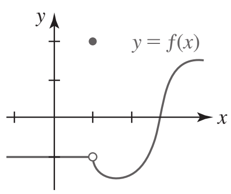


FIGURA 3.1.14 Gráfica para el problema 17

18.

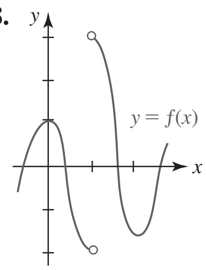


FIGURA 3.1.15 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-28, cada límite tiene el valor 0, pero alguna notación es incorrecta. Si la notación es incorrecta, escriba la declaración correcta.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[4]{x} = 0$

21. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-x} = 0$

22. $\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{x+2} = 0$

23. $\lim\limits_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = 0$

24. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor = 0$

25. $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sen} x = 0$

26. $\lim\limits_{x\to 1} \cos^{-1} x = 0$

27. $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$

28. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$

En los problemas 29 y 30, use la gráfica dada para encontrar cada límite, o concluya que no existe.

29. ***a)*** $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ***d)*** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ***f)*** $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

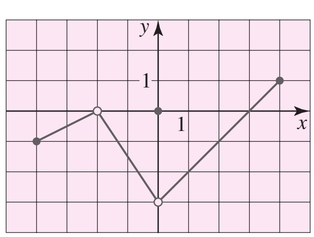


FIGURA 3.1.16 Gráfica para el problema 29

30. ***a)*** $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ ***d)*** $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ***f)*** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

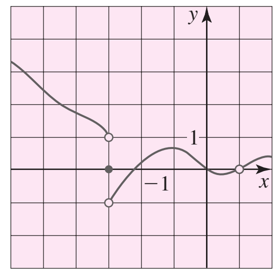


FIGURA 3.1.17 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, trace una gráfica de la función f con las propiedades dadas.

31. $f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe

32. $f(-2) = 3, \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1, f(1) = -2$

33. $f(0) = 1, \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3, f(1)$ está indefinido, $f(3) = 0$

34. $f(-2) = 2, f(x) = 1, -1 \leq x \leq 1, \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, $f(2) = 3$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 35-40, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada f sobre el intervalo $[-0.5, 0.5]$. Use la gráfica para conjeturar el valor de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, o concluya que el límite no existe.

35. $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$

36. $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$

37. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4+x}}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{9}{x}\left[\sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}\right]$

39. $f(x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{x}$

40. $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

En los problemas 41-50, proceda como en los ejemplos 3, 6 y 7 y use una calculadora para construir tablas de valores funcionales. Conjeture el valor de cada límite o concluya que no existe.

41. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6\sqrt{x} - 6\sqrt{2x-1}}{x-1}$

42. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

47. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x-4}$

48. $\lim\limits_{x\to 3} \left[\dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{6\sqrt{x-2}}{x^2-9}\right]$

49. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + x - 2}{x-1}$

50. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x+2}$

iii) El teorema 3.2.5 no afirma que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero. El ejemplo 8 es un contraejemplo de esa interpretación. No obstante, el teorema 3.2.5 establece que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero *y* el límite del numerador no es cero.

3.2 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-52, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x\to -4} 15$
2. $\lim_{x\to 0} \cos\pi$
3. $\lim_{x\to 3} (-4)x$
4. $\lim_{x\to 2} (3x - 9)$
5. $\lim_{x\to -2} x^2$
6. $\lim_{x\to 5} (-x^3)$
7. $\lim_{x\to -1} (x^3 - 4x + 1)$
8. $\lim_{x\to 6} (-5x^2 + 6x + 8)$
9. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x + 4}{x - 7}$
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + 5}{3x}$
11. $\lim_{t\to 1} (3t - 1)(5t^2 + 2)$
12. $\lim_{t\to -2} (t + 4)^2$
13. $\lim_{s\to 7} \dfrac{s^2 - 21}{s + 2}$
14. $\lim_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 6x}{x^2 - 7x + 6}$
15. $\lim_{x\to -1} (x + x^2 + x^3)^{135}$
16. $\lim_{x\to 2} \dfrac{(3x - 4)^{40}}{(x^2 - 2)^{36}}$
17. $\lim_{x\to 6} \sqrt{2x - 5}$
18. $\lim_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})$
19. $\lim_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{t}}{t^2 + t - 2}$
20. $\lim_{x\to 2} x^2\sqrt{x^2 + 5x + 2}$
21. $\lim_{y\to -5} \dfrac{y^2 - 25}{y + 5}$
22. $\lim_{u\to 8} \dfrac{u^2 - 5u - 24}{u - 8}$
23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
24. $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^3 + 1}{t^2 - 1}$
25. $\lim_{x\to 10} \dfrac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 8)}$
26. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x + 6}{4x^2 - 36}$
27. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x - 2}$
28. $\lim_{x\to 1.5} \dfrac{2x^2 + 3x - 9}{x - 1.5}$
29. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^3 - 2t + 1}{t^3 + t^2 - 2}$
30. $\lim_{x\to 0} x^3(x^4 + 2x^3)^{-1}$
31. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(x + 2)(x^5 - 1)^3}{(\sqrt{x} + 4)^2}$
32. $\lim_{x\to -2} x\sqrt{x + 4}\,\sqrt[3]{x - 6}$
33. $\lim_{x\to 0} \left[\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x} + \dfrac{1}{x}\right]$
34. $\lim_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{6}{x^2 + 2x - 8}\right]$
35. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{(x + 3)^2}{\sqrt{x - 3}}$
36. $\lim_{x\to 3} (x - 4)^{99}(x^2 - 7)^{10}$
37. $\lim_{x\to 10} \sqrt{\dfrac{10x}{2x + 5}}$
38. $\lim_{r\to 1} \dfrac{\sqrt{(r^2 + 3r - 2)^3}}{\sqrt[3]{(5r - 3)^2}}$
39. $\lim_{h\to 4} \sqrt{\dfrac{h}{h + 5}}\left(\dfrac{h^2 - 16}{h - 4}\right)^2$
40. $\lim_{t\to 2} (t + 2)^{3/2}(2t + 4)^{1/3}$
41. $\lim_{x\to 0^-} \sqrt[5]{\dfrac{x^3 - 64x}{x^2 + 2x}}$
42. $\lim_{x\to 1^+} \left(8x + \dfrac{2}{x}\right)^5$
43. $\lim_{t\to 1} (at^2 - bt)^2$
44. $\lim_{x\to -1} \sqrt{u^2x^2 + 2xu + 1}$
45. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(8 + h)^2 - 64}{h}$
46. $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[(1 + h)^3 - 1]$
47. $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}\right)$
48. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \quad (x > 0)$
49. $\lim_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$
50. $\lim_{u\to 5} \dfrac{\sqrt{u + 4} - 3}{u - 5}$
51. $\lim_{v\to 0} \dfrac{\sqrt{25 + v} - 5}{\sqrt{1 + v} - 1}$
52. $\lim_{x\to 1} \dfrac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$

En los problemas 53-60, suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 2$. Encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

53. $\lim_{x\to a} [5f(x) + 6g(x)]$
54. $\lim_{x\to a} [f(x)]^3$
55. $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}$
56. $\lim_{x\to a} \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$
57. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{f(x) - 2g(x)}$
58. $\lim_{x\to a} \dfrac{[f(x)]^2 - 4[g(x)]^2}{f(x) - 2g(x)}$
59. $\lim_{x\to a} xf(x)g(x)$
60. $\lim_{x\to a} \dfrac{6x + 3}{xf(x) + g(x)},\ a \neq -\frac{1}{2}$

Piense en ello

En los problemas 61 y 62, use el primer resultado para encontrar los límites en los incisos *a*)-*c*). Justifique cada paso de su trabajo citando la propiedad idónea de los límites.

61. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x - 1} = 100$

 a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x^2 - 1}$ **b)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{50} - 1}{x - 1}$ **c)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x^{100} - 1)^2}{(x - 1)^2}$

62. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

 a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen} x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{8x^2 - \operatorname{sen} x}{x}$

63. Use $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para mostrar que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

64. Si $\lim_{x\to 2} \dfrac{2f(x) - 5}{x + 3} = 4$, encuentre $\lim_{x\to 2} f(x)$.

puesto que ambos límites existen. Así,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+2x-3}=\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$ ■

EJEMPLO 8 Uso de una identidad pitagórica

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Solución Para calcular este límite empezamos con un poco de ingenio algebraico al multiplicar el numerador y el denominador por el factor conjugado del numerador. Luego usamos la identidad pitagórica fundamental $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ en la forma $1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}.\end{aligned}$$

Para el siguiente paso de nuevo se acude al álgebra para volver a escribir la expresión fraccionaria como un producto, y luego se usan los resultados en (5):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)\\&=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right).\end{aligned}$$

Debido a que $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/(1+\cos x)=0/2=0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0. \qquad (13)$$ ■

Puesto que el límite en (13) es igual a 0, puede escribirse

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x-1)}{x}=(-1)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Luego, al dividir entre -1 se obtiene otro importante límite trigonométrico:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0. \qquad (14)$$

En la FIGURA 3.4.6 se muestra la gráfica de $f(x)=(\cos x-1)/x$. Los resultados en (10) y (14) se usarán en la sección "Desarrolle su competencia 3.7" y también en la sección 3.4.

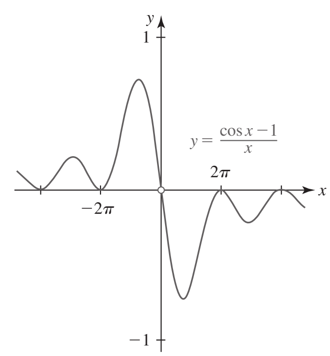


FIGURA 3.4.6 Gráfica de $f(x)=(\cos x-1)/x$

3.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

Fundamentos

En los problemas 1-36, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$
2. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(-4t)}{t}$
3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{4+\cos x}$
4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$
5. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\cos 3x}$
6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{3x}$
7. $\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t\sec t\csc 4t}$
8. $\lim_{t\to 0}5t\cot 2t$
9. $\lim_{t\to 0}\dfrac{2\operatorname{sen}^2 t}{t\cos^2 t}$
10. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2(t/2)}{\operatorname{sen} t}$
11. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 6t}{t^2}$
12. $\lim_{t\to 0}\dfrac{t^3}{\operatorname{sen}^2 3t}$
13. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2}$
14. $\lim_{x\to 2\pi}\dfrac{x-2\pi}{\operatorname{sen} x}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

16. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x - \pi/2)}{x}$

18. $\lim_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{sen}(5x + 10)}{4x + 8}$

19. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{\operatorname{sen} 7t}$

20. $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} 2t \csc 3t$

21. $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$

22. $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{1 - \cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

23. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 - 5t\operatorname{sen} t}{t^2}$

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos 4t}{\cos 8t}$

25. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(x + 2\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}{x}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{x}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \tan x}{x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x^2}{x^2}$

30. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{1 - \cos t}$

31. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 2)}{x^2 + 2x - 8}$

32. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\operatorname{sen}(x - 3)}$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} 4x + 1 - \cos x}{x}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4x^2 - 2\operatorname{sen} x}{x}$

35. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

36. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

37. Suponga que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (17) de la sección 2.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}.$$

38. Suponga que $f(x) = \cos x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (18) de la sección 2.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}.$$

En los problemas 39 y 40, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

39. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$

40. $\lim_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{\pi}{x} = 0$

41. Use las propiedades de los límites dadas en el teorema 3.2.3 para demostrar que

a) $\lim_{x\to 0} x^3\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ ***b)*** $\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x} = 0.$

42. Si $|f(x)| \le B$ para toda x en un intervalo que contiene a 0, demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

En los problemas 43 y 44, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

43. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $2x - 1 \le f(x) \le x^2 - 2x + 3, x \ne 2$

44. $\lim_{x\to 0} f(x)$ donde $|f(x) - 1| \le x^2, x \ne 0$

≡ Piense en ello

En los problemas 45-48, use una sustitución idónea para encontrar el límite dado.

45. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x - \pi/4}$

46. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{x - \pi}{\tan 2x}$

47. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/x)}{x - 1}$

48. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\cos(\pi/x)}{x - 2}$

49. Analice: ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0?

50. La existencia de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no implica la existencia de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}$. Explique por qué el segundo límite no existe.

3.5 Límites que involucran el infinito

Introducción En las secciones 2.2 y 2.3 se consideraron algunas funciones cuyas gráficas poseían asíntotas. En esta sección se verá que las asíntotas vertical y horizontal de una gráfica están definidas en términos de límites que implican el concepto de *infinito*. Recuerde, los **símbolos de infinito**, $-\infty$ ("menos infinito") y ∞ ("más infinito") son herramientas de notación usadas para indicar, a su vez, que una cantidad decrece o crece sin límite en la dirección negativa (en el plano cartesiano esto significa a la izquierda para x y hacia abajo para y) y en la dirección positiva (a la derecha para x y hacia arriba para y).

En algunos textos se usa el símbolo $+\infty$ y las palabras *más infinito* en lugar de ∞ e *infinito.*

Aunque la terminología y notación usadas cuando se trabaja con $\pm\infty$ son estándar, lamentablemente son ligeramente desafortunadas y pueden ser confusas. Así, desde el principio se advierte que se considerarán dos tipos de límites. Primero se analizarán

- límites infinitos.

La expresión *límites infinitos* siempre se refiere a *un límite que no existe* porque la función f exhibe un comportamiento no acotado: $f(x) \to -\infty$ o $f(x) \to \infty$. Luego se considerarán

- límites en el infinito.

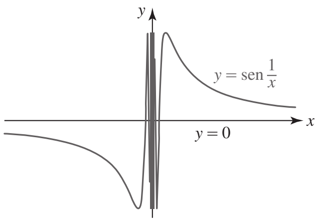


FIGURA 3.5.13 Gráfica de la función en el ejemplo 12

EJEMPLO 12 Otro repaso a una función trigonométrica

En el ejemplo 2 de la sección 3.4 vimos que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. No obstante, el límite en el infinito, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$, existe. Por la ecuación (18), podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Como se observa en la FIGURA 3.5.13, $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Compare esta gráfica con la mostrada en la figura 3.4.2. ■

3.5 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

Fundamentos

En los problemas 1-24, exprese el límite dado como un número, como $-\infty$, o como ∞.

1. $\lim_{x\to 5^-}\dfrac{1}{x-5}$
2. $\lim_{x\to 6}\dfrac{4}{(x-6)^2}$
3. $\lim_{x\to -4^+}\dfrac{2}{(x+4)^3}$
4. $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{10}{x^2-4}$
5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^4}$
6. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{\sqrt{x}}$
7. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{x}$
8. $\lim_{x\to \pi^+}\csc x$
9. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x}{4x^2+5}$
10. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^{-2}}$
11. $\lim_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{2}{x^4}\right)$
12. $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)$
13. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{8-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$
14. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1+7\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}$
15. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{x-1}{2x+6}\right)$
16. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3x+1}\right)\left(\dfrac{4x^2+1}{2x^2+x}\right)^3$
17. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x+2}{6x-8}}$
18. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{7-16x}}$
19. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$
20. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$
21. $\lim_{x\to\infty}\cos\left(\dfrac{5}{x}\right)$
22. $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{3-6x}\right)$
23. $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$
24. $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+8}\right)$

En los problemas 25-32, encuentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$ para la función dada f.

25. $f(x) = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
26. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$
27. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$
28. $f(x) = \dfrac{-5x^2+6x+3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
29. $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
30. $f(x) = 1+\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
31. $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x-5}$
32. $f(x) = \dfrac{|4x|+|x-1|}{x}$

En los problemas 33-42, encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función dada f. Trace la gráfica.

33. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
34. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
35. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
36. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$
37. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-2)}$
38. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+4}$
39. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$
40. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
41. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$
42. $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$

En los problemas 43-46, use la gráfica dada para encontrar:

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
c) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ *d)* $\lim_{x\to \infty} f(x)$

43.

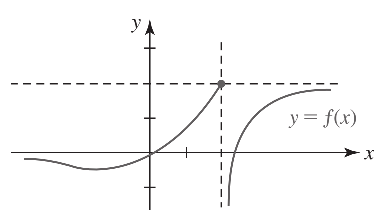


FIGURA 3.5.14 Gráfica para el problema 43

44.

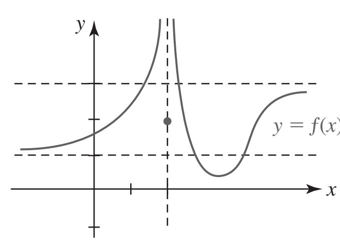


FIGURA 3.5.15 Gráfica para el problema 44

45.

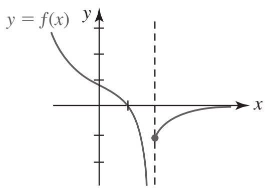


FIGURA 3.5.16 Gráfica para el problema 45

46.

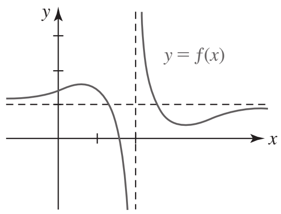


FIGURA 3.5.17 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47-50, trace una gráfica de una función f que satisface las condiciones dadas.

47. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

48. $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$

49. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

50. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $f(3) = 0$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

51. Use una sustitución idónea para evaluar

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{3}{x}.$$

52. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un cuerpo que se mueve con velocidad v es $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa inicial y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre a m cuando $v \to c^-$?

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o SAC para investigar el límite dado. Conjeture su valor.

53. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{2}{x^2}$ **54.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

55. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Use la gráfica para conjeturar los valores de $f(x)$ cuando

a) $x \to -1^+$, ***b***) $x \to 0$ y ***c***) $x \to \infty$.

56. ***a***) Un n-gono regular es un polígono regular de n lados inscrito en un círculo; el polígono está formado por n puntos equidistantes sobre el círculo. Suponga que el polígono que se muestra en la FIGURA 3.5.18 representa un n-gono regular inscrito en un círculo de radio r. Use trigonometría para demostrar que el área $A(n)$ del n-gono está dada por

$$A(n) = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

b) Tiene sentido afirmar que el área $A(n)$ tiende al área del círculo a medida que aumenta el número de lados del n-gono. Use una calculadora para obtener $A(100)$ y $A(1\,000)$.

c) Sea $x = 2\pi/n$ en $A(n)$ y observe que cuando $n \to \infty$ entonces $x \to 0$. Use (10) de la sección 3.4 para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} A(n) = \pi r^2$.

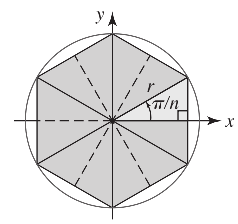


FIGURA 3.5.18 n-gono inscrito para el problema 56

≡ Piense en ello

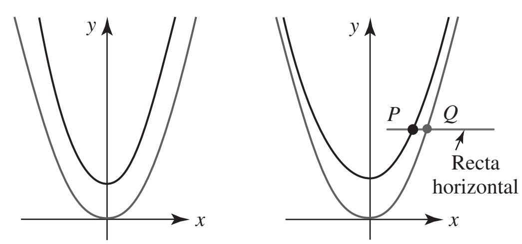
57. ***a***) Suponga que $f(x) = x^2/(x + 1)$ y $g(x) = x - 1$. Demuestre que

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

b) ¿Qué indica el resultado del inciso *a*) respecto a las gráficas de f y g, donde $|x|$ es grande?

c) De ser posible, asigne un nombre a la función g.

58. Muy a menudo los estudiantes e incluso los profesores trazan incorrectamente gráficas desplazadas verticalmente. Por ejemplo, las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 1$ están dibujadas incorrectamente en la FIGURA 3.5.19*a*) pero lo están correctamente en la figura 3.5.19*b*). Demuestre que la figura 3.5.19*b*) es correcta al mostrar que la distancia horizontal entre los dos puntos P y Q en la figura tiende a 0 cuando $x \to \infty$.



a) Incorrecto *b*) Correcto

FIGURA 3.5.19 Gráficas para el problema 58

3.6 Límites: un enfoque formal

Introducción En el análisis que se presenta a continuación se considerará un enfoque alterno a la idea de límite, que se basa en conceptos analíticos más que en conceptos intuitivos. Una **demostración** de la existencia de un límite jamás debe estar basada en la habilidad para elaborar gráficas o en tablas de valores numéricos. Aunque una buena comprensión intuitiva de

Problemas 2.7

1. $S(x) = x + \dfrac{50}{x}$; $(0, \infty)$

3. $S(x) = 3x^2 - 4x + 2$; $[0, 1]$

5. $A(x) = 100x - x^2$; $[0, 100]$

7. $A(x) = 2x - \dfrac{1}{2}x^2$; $[0, 4]$

9. $d(x) = \sqrt{2x^2 + 8}$; $(-\infty, \infty)$

11. $P(A) = 4\sqrt{A}$; $(0, \infty)$

13. $d(C) = C/\pi$; $(0, \infty)$

15. $A(h) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h^2$; $(0, \infty)$

17. $A(x) = \dfrac{1}{4\pi}x^2$; $(0, \infty)$

19. $C(x) = 8x + \dfrac{3\,200}{x}$; $(0, \infty)$

21. $S(w) = 3w^2 + \dfrac{1\,200}{w}$; $(0, \infty)$

23. $d(t) = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}$; $(0, \infty)$

25. $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & 0 \le h < 5 \\ 1\,200h - 3\,000, & 5 \le h \le 8 \end{cases}$; $[0, 8]$

27. $h(\theta) = 300 \tan \theta$; $(0, \pi/2)$

29. $L(\theta) = 3 \csc \theta + 4 \sec \theta$; $(0, \pi/2)$

31. $\theta(x) = \tan^{-1}(1/x) - \tan^{-1}(1/2x)$; $(0, \infty)$

33. $V(\theta) = 360 + 75 \cot \theta$

35. $A(\phi) = 100 \cos \phi + 50 \text{ sen } 2\phi$ **37.** $V(x) = 2\sqrt{3}(1 - x^2)$

Competencia final de la unidad 2

A. 1. falso **3.** verdadero

5. falso **7.** verdadero

9. falso **11.** verdadero

13. verdadero **15.** verdadero

17. verdadero **19.** verdadero

B. 1. $[-2, 0) \cup (0, \infty)$ **3.** $(-8, 6)$

5. $(1, 0)$; $(0, 0), (5, 0)$ **7.** $(0, -\frac{4}{5})$

9. 6 **11.** 0

13. $(3, 5)$ **15.** $\log_3 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

17. $\dfrac{1}{9}$ **19.** $y = \ln x$

C. 1. ***a)*** 3 ***b)*** 0 ***c)*** -2 ***d)*** 0 ***e)*** 2.5 ***f)*** 2 ***g)*** 1 ***h)*** 0 ***i)*** 3 ***j)*** 4

3. 1 y 8 están en el rango; 5 no está en el rango

5. $-3x^2 + 4x - 3xh - h^2 + 2h - 1$

7. ***f)*** **9.** ***d)***

11. ***h)*** **13.** ***c)***

15. ***b)*** **17.** $\dfrac{3^{1-h} - 3}{h}$

19. ***a)*** ab ***b)*** b/a ***c)*** $1/b$

21. $f(x) = 5e^{(-\frac{1}{6}\ln 5)x} = 5e^{-0.2682x}$ **23.** $f(x) = 5 + (\frac{1}{2})^x$

25. ***b)*** **27.** ***d)***

29. ***c)***

31. ***a)*** $V = 6l^3$ ***b)*** $V = \dfrac{2}{9}w^3$ ***c)*** $V = \dfrac{3}{4}h^3$

Problemas 3.1

1. 8 **3.** no existe

5. 2 **7.** no existe

9. 0 **11.** 3

13. 0

15. ***a)*** 1 ***b)*** -1 ***c)*** 2 ***d)*** no existe

17. ***a)*** 2 ***b)*** -1 ***c)*** -1 ***d)*** -1

19. correcto **21.** $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$

23. $\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$ **25.** correcto

27. $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$

29. ***a)*** -1 ***b)*** 0 ***c)*** -3 ***d)*** -2 ***e)*** 0 ***f)*** 1

35. no existe **37.** $-\dfrac{1}{4}$

39. -2 **41.** -3

43. 0 **45.** $\dfrac{1}{3}$

47. $\dfrac{1}{4}$ **49.** 5

Problemas 3.2

1. 15 **3.** -12

5. 4 **7.** 4

9. $-\dfrac{8}{5}$ **11.** 14

13. $\dfrac{28}{9}$ **15.** -1

17. $\sqrt{7}$ **19.** no existe

21. -10 **23.** 3

25. 60 **27.** 14

29. $\dfrac{1}{5}$ **31.** $-\dfrac{1}{8}$

33. 3 **35.** no existe

37. 2 **39.** $\dfrac{128}{3}$

41. -2 **43.** $a^2 - 2ab + b^2$

45. 16 **47.** $-1/x^2$

49. $\dfrac{1}{2}$ **51.** $\dfrac{1}{5}$

53. 32 **55.** $\dfrac{1}{2}$

57. no existe **59.** $8a$

Problemas 3.3

1. ninguno **3.** 3 y 6

5. $n\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **7.** 2

9. ninguno **11.** e^{-2}

13. ***a)*** continua ***b)*** continua

15. ***a)*** continua ***b)*** continua

17. ***a)*** no continua ***b)*** no continua

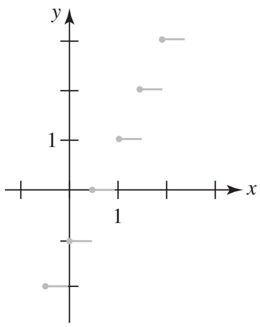
19. ***a)*** continua ***b)*** no continua

21. ***a)*** no continua ***b)*** no continua

23. ***a)*** no continua ***b)*** continua

25. $m = 4$ **27.** $m = 1$; $n = 3$

29. discontinua en $n/2$, donde n es un entero;



31. defina $f(9) = 6$ **33.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

35. 0 **37.** 1

39. 1 **41.** $-\pi/6$

43. $(-3, \infty)$ **45.** $c = 4$

47. $c = 0$, $c = \pm\sqrt{2}$ **55.** $-1.22, -0.64, 1.34$

57. 2.21 **59.** 0.78

Problemas 3.4

1. $\dfrac{3}{2}$ **3.** 0

5. 1 **7.** 4

9. 0 **11.** 36

13. $\dfrac{1}{2}$ **15.** no existe

17. 3 **19.** $\dfrac{3}{7}$

21. 0 **23.** -4

25. 4 **27.** $\dfrac{1}{2}$

29. 5 **31.** $\dfrac{1}{6}$

33. 8 **35.** $\sqrt{2}$

37. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **43.** 3

Problemas 3.5

1. $-\infty$ **3.** ∞

5. ∞ **7.** ∞

9. $\dfrac{1}{4}$ **11.** 5

13. $-\dfrac{1}{4}$ **15.** $\dfrac{5}{2}$

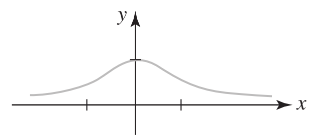
17. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **19.** 0

21. 1 **23.** $-\pi/6$

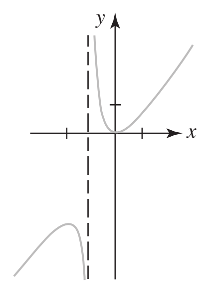
25. -4; 4 **27.** $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

29. -1; 1 **31.** -1; 1

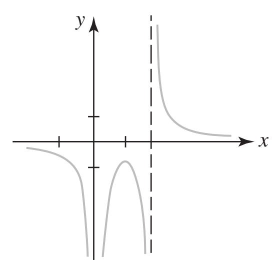
33. AV: ninguna; AH: $y = 0$;



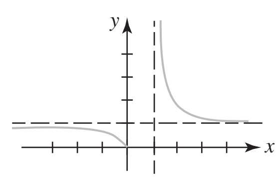
35. AV: $x = -1$; AH: ninguna;



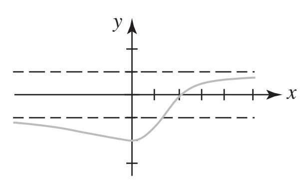
37. AV: $x = 0$, $x = 2$; AH: $y = 0$;



39. AV: $x = 1$; AH: $y = 1$;



41. AV: ninguna; AH: $y = -1$, $y = 1$;



43. ***a)*** 2 ***b)*** $-\infty$ ***c)*** 0 ***d)*** 2

45. ***a)*** $-\infty$ ***b)*** -1 ***c)*** ∞ ***d)*** 0

51. 3

Problemas 3.6

1. elija $\delta = \varepsilon$ **3.** elija $\delta = \varepsilon$

5. elija $\delta = \varepsilon$ **7.** elija $\delta = \varepsilon/3$

9. elija $\delta = 2\varepsilon$ **11.** elija $\delta = \varepsilon$

13. elija $\delta = \varepsilon/8$ **15.** elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

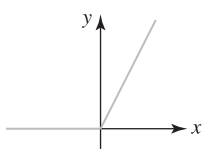
17. elija $\delta = \varepsilon^2/5$
19. elija $\delta = \varepsilon/2$
21. elija $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$
23. elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$
25. elija $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$
31. elija $N = 7/(4\varepsilon)$
33. elija $N = -30/\varepsilon$

Competencia final de la unidad 3

A. 1. verdadero
3. falso
5. falso
7. verdadero
9. falso
11. falso
13. verdadero
15. verdadero
17. falso
19. verdadero
21. falso

B. 1. 4
3. $-\frac{1}{5}$
5. 0
7. ∞
9. 1
11. 3^-
13. $-\infty$
15. -2
17. 10
19. continua
21. 9

C. 5. ***a*), *e*), *f*), *h*)**
7. ***c*), *h*)**
9. ***b*), *c*), *d*), *e*), *f*)**
11.

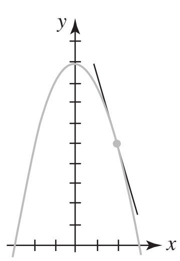


; continua en todas partes

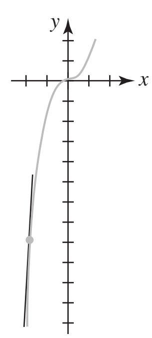
13. $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$
15. $(-\infty, -\sqrt{5}), (\sqrt{5}, \infty)$
17. $\frac{1}{6}$

Problemas 4.1

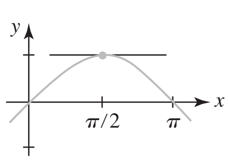
1. -4.5;



3. 7;



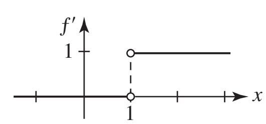
5. $\dfrac{3\sqrt{3} - 6}{\pi}$;



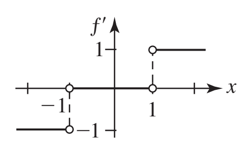
7. $m_{\tan} = 6; \quad y = 6x - 15$
9. $m_{\tan} = -1; \quad y = -x - 1$
11. $m_{\tan} = -23; \quad y = -23x + 32$
13. $m_{\tan} = -\frac{1}{2}; \quad y = -\frac{1}{2}x - 1$
15. $m_{\tan} = 2; \quad y = 2x + 1$
17. $m_{\tan} = \frac{1}{4}; \quad y = \frac{1}{4}x + 1$
19. $m_{\tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{1}{2}$
21. no una recta tangente
23. $y = x - 2; \quad (0, -2)$
25. $m_{\tan} = -2x + 6; \quad (3, 10)$
27. $m_{\tan} = 3x^2 - 3; \quad (-1, 2), (1, -2)$
29. 58 mi/h
31. 3.8 h
33. -14
35. ***a*)** -4.9 m/s ***b*)** 5 s ***c*)** -49 m/s
37. ***a*)** 448 pies; 960 pies; 1 008 pies; 960 pies
***b*)** 144 pies/s ***d*)** 16 s ***e*)** $-32t + 256$
***f*)** -256 pies/s ***g*)** 1 024 pies

Problemas 4.2

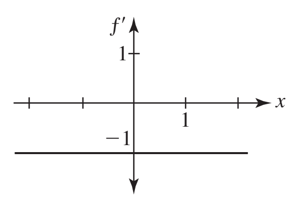
1. 0
3. -3
5. $6x$
7. $-2x + 4$
9. $2x + 2$
11. $3x^2 + 1$
13. $-3x^2 + 30x - 1$
15. $-2/(x + 1)^2$
17. $5/(x + 4)^2$
19. $-1/(2x^{3/2})$
21. $y = -x - 4$
23. $y = 2x - 2$
25. $(-4, -6)$
27. $(1, -2), (-1, 2)$
29. $x; \left(3, \frac{7}{2}\right)$
31. $-3x^2; \quad (2, -4), (-2, 12)$
33. $f'_+(2) = 2$ pero $f'_-(2) = -1$
35. $20a$
37. $3a^2 - 8a$
39. $4/(3 - a)^2$
41. $y = \frac{1}{2}x + 3; \quad f(-3) = \frac{3}{2}; \quad f'(-3) = \frac{1}{2}$
43.



45.



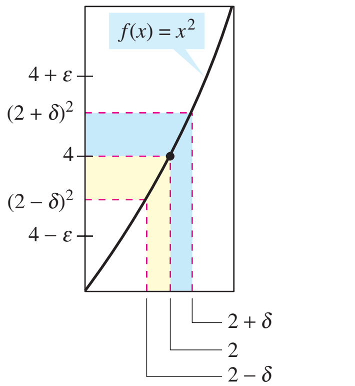
47.



49. ***e*)**
51. ***b*)**
53. ***a*)**

Problemas 4.3

1. 0
3. $9x^8$
5. $14x - 4$
7. $2x^{-1/2} + 4x^{-5/3}$
9. $x^4 - 12x^3 + 18x$
11. $20x^4 - 20x^3 - 18x^2$
13. $6x^5 + 40x^3 + 50x$
15. $16 + 4/\sqrt{x}$
17. $192u^2$
19. $-1/r^2 - 2/r^3 - 3/r^4 - 4/r^5$
21. $y = 6x + 3$
23. $y = \frac{1}{4}x + 5$
25. $(4, -11)$
27. $(3, -25), (-1, 7)$



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 4

Figura 1.15

EJEMPLO 8 Aplicación de la definición ε-δ de límite

Usar la definición ε-δ de límite para demostrar que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Solución Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Para encontrar un δ adecuado, comenzamos por escribir $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$. Para todo x del intervalo $(1, 3)$, $x + 2 < 5$ se sabe que $|x + 2| < 5$. De tal manera, se toma δ igual al mínimo entre $\varepsilon/5$ y 1, resulta que, siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene que

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)(5) = \varepsilon$$

como se muestra en la figura 1.15.

A lo largo de este capítulo, se utilizará la definición ε-δ de límite principalmente para demostrar teoremas relativos a los límites y para establecer la existencia o inexistencia de tipos de límites específicos. Para *calcular* límites, se describirán técnicas más fáciles de usar que la definición ε-δ de límite.

1.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, completar la tabla y utilizar el resultado para estimar el límite. Representar la función utilizando una herramienta de graficación, con el fin de confirmar su resultado.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{6}}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

4. $\displaystyle\lim_{x\to -5} \frac{\sqrt{4 - x} - 3}{x + 5}$

x	-5.1	-5.01	-5.001	-4.999	-4.99	-4.9
$f(x)$						

5. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{[1/(x + 1)] - (1/4)}{x - 3}$

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
$f(x)$						

6. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{[x/(x + 1)] - (4/5)}{x - 4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

En los ejercicios 9 a 14, elaborar una tabla de valores para la función y utilizar el resultado para estimar el valor del límite. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y confirmar el resultado.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$

10. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+7x+12}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^6-1}$

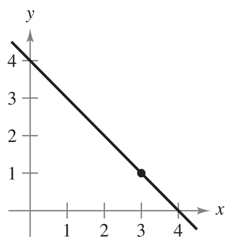
12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

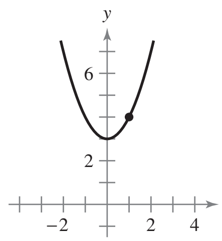
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\tan 2x}$

En los ejercicios 15 a 24, utilizar la gráfica para encontrar el límite (si es que existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

15. $\lim\limits_{x\to 3} (4-x)$

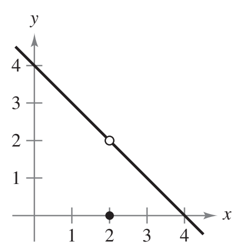


16. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+3)$



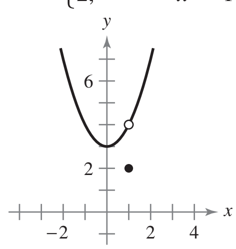
17. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

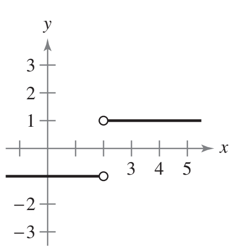


18. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

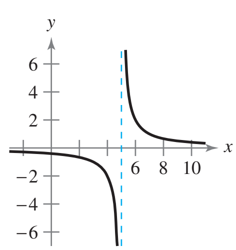
$$f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



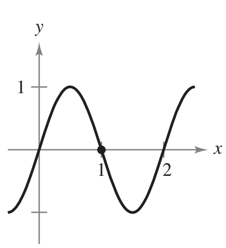
19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$



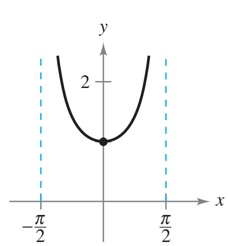
20. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2}{x-5}$



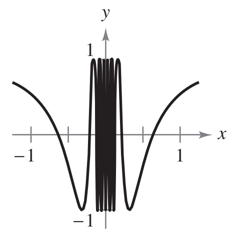
21. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen} \pi x$



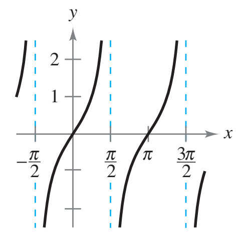
22. $\lim\limits_{x\to 0} \sec x$



23. $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$



24. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \tan x$



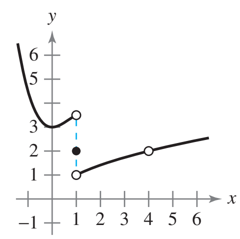
En los ejercicios 25 y 26, utilizar la gráfica de la función *f* para determinar si existe el valor de la cantidad dada. De ser así, ubicarla; si no existe, explicar por qué.

25. *a)* $f(1)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) $f(4)$

d) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$



26. *a)* $f(-2)$

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

c) $f(0)$

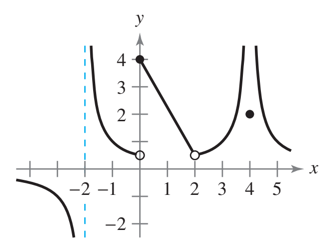
d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

e) $f(2)$

f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

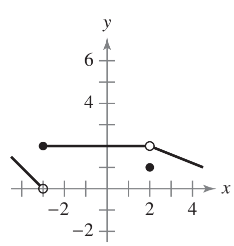
g) $f(4)$

h) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

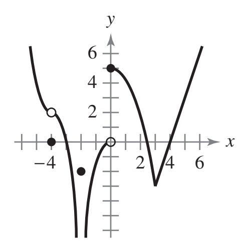


En los ejercicios 27 y 28, utilizar la gráfica de *f* con el fin de identificar los valores de *c* para los que existe el límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

27.



28.



En los ejercicios 29 y 30, dibujar la gráfica de *f*. Después identificar los valores de *c* para los que existe el límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

29. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \geq 4 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$

En los ejercicios 31 y 32, construir una gráfica de una función *f* que satisfaga los valores indicados (existen muchas respuestas correctas).

31. $f(0)$ no está definido.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

32. $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

33. ***Modelo matemático*** Por una llamada telefónica de larga distancia, un hotel hace un cargo de \$9.99 para el primer minuto y de \$0.79 por cada minuto o fracción adicional. Una fórmula para el costo está dada por

$$C(t) = 9.99 - 0.79[\![-(t-1)]\!]$$

donde t es el tiempo en minutos.

(*Nota*: $[\![x]\!]$ = mayor entero n tal que $n \le x$. Por ejemplo, $[\![3.2]\!] = 3$ y $[\![-1.6]\!] = -2$.)

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la función de costo para $0 < t \le 6$.

b) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función a medida que t tiende a 3.5. Utilizar la gráfica y la tabla para encontrar

$$\lim_{t\to 3.5} C(t).$$

t	3	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4
C				?			

c) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función a medida que t se aproxima a 3.

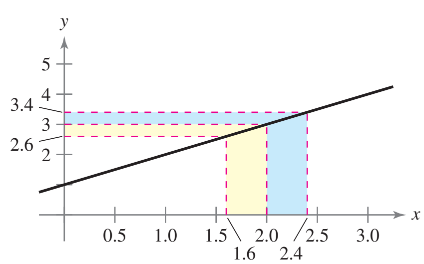
t	2	2.5	2.9	3	3.1	3.5	4
C				?			

¿Existe el límite de $C(t)$ cuando t se aproxima a 3? Explicar la respuesta.

34. Realizar de nuevo el ejercicio anterior, considerando ahora

$$C(t) = 5.79 - 0.99[\![-(t-1)]\!].$$

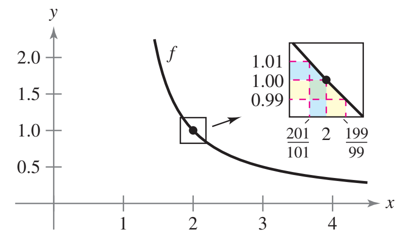
35. En la figura se muestra la gráfica de $f(x) = x + 1$. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < 0.4$.



36. La gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

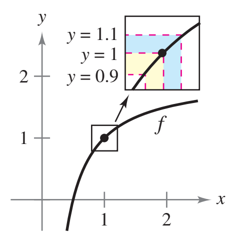
se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < 0.01$.



37. La gráfica de

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

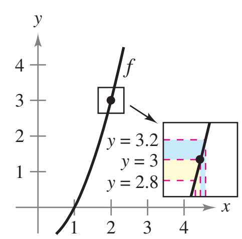
se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < 0.1$.



38. La gráfica de

$$f(x) = x^2 - 1$$

se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < 0.2$.



En los ejercicios 39 a 42, encontrar el límite *L*. Luego la $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 0.01$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

39. $\lim_{x\to 2} (3x + 2)$

40. $\lim_{x\to 4} \left(4 - \frac{x}{2}\right)$

41. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3)$

42. $\lim_{x\to 5} (x^2 + 4)$

El símbolo señala un ejercicio en el que se pide utilizar una herramienta de graficación o un sistema simbólico de álgebra computarizado. La solución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología apropiada.

En los ejercicios 43 a 54, encontrar el límite L. Luego utilizar la definición ε-δ de límite para demostrar que el límite es L.

43. $\lim\limits_{x \to 4} (x + 2)$

44. $\lim\limits_{x \to -3} (2x + 5)$

45. $\lim\limits_{x \to -4} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

46. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2}{5}x + 7\right)$

47. $\lim\limits_{x \to 6} 3$

48. $\lim\limits_{x \to 2} (-1)$

49. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x}$

50. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}$

51. $\lim\limits_{x \to -5} |x - 5|$

52. $\lim\limits_{x \to 6} |x - 6|$

53. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1)$

54. $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 + 3x)$

55. ¿Cuál es el límite de $f(x) = 4$ cuando x tiende a π?

56. ¿Cuál es el límite de $g(x) = x$ cuando x tiende a π?

Redacción **En los ejercicios 57 a 60, representar la función con una herramienta de graficación y estimar el límite (si existe). ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Puede detectar un posible error en la determinación del dominio mediante un mero análisis de la gráfica que genera la herramienta de graficación? Escribir unas líneas acerca de la importancia de examinar una función de manera analítica además de hacerlo gráficamente.**

57. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

58. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

59. $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

$\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

60. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Desarrollo de conceptos

61. Escribir una breve descripción de lo que significa la notación

$\lim\limits_{x \to 8} f(x) = 25.$

62. La definición de límite de la página 52 requiere que f sea una función definida sobre un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c. ¿Por qué es necesaria esta condición?

63. Identificar tres tipos de comportamiento relacionados con la inexistencia de un límite. Ejemplificar cada tipo con una gráfica de una función.

Para discusión

64. *a*) Si $f(2) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca del límite de f cuando x tiende a 2? Explicar.

b) Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2)$? Explicar.

65. ***Joyería*** Un joyero ajusta un anillo de tal manera que su circunferencia interna es de 6 cm.

a) ¿Cuál es el radio del anillo?

b) Si la circunferencia interna del anillo puede variar entre 5.5 y 6.5 centímetros, ¿cuánto puede variar su radio?

c) Utilizar la definición ε-δ de límite para describir esta situación. Identificar ε y δ.

66. ***Deportes*** Un fabricante de artículos deportivos diseña una pelota de golf que tiene un volumen de 2.48 pulgadas cúbicas.

a) ¿Cuál es el radio de la pelota de golf?

b) Si el volumen de la pelota puede variar entre 2.45 y 2.51 pulgadas cúbicas, ¿cuánto puede variar su radio?

c) Utilizar la definición ε-δ de límite para describir esta situación. Identificar ε y δ.

67. Considerar la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

mediante la evaluación de f con valores de x cercanos a 0. Construya la gráfica de f.

68. Considerar la función

$$f(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}.$$

Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}$$

mediante la evaluación de f con valores de x cercanos a 0. Construir la gráfica de f.

69. ***Análisis gráfico*** La afirmación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

significa que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon = 0.001$, entonces

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0.001.$$

Utilizar una herramienta de graficación para representar ambos lados de esta desigualdad. Usando la función *zoom*, encontrar un intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ tal que la gráfica del lado izquierdo quede por debajo de la del miembro de la derecha.

70. ***Análisis gráfico*** La afirmación

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 3$$

significa que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon = 0.001$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| < 0.001.$$

Utilizar una herramienta de graficación para representar ambos lados de esta desigualdad. Usando la función *zoom*, encontrar un intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ tal que la gráfica del lado izquierdo quede por debajo de la del miembro de la derecha.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 71 a 74, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

71. Si f no está definida en $x = c$, no existe el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.

72. Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es 0, debe existir un número k tal que $f(k) < 0.001$.

73. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

74. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

En los ejercicios 75 y 76, considerar la función $f(x) = \sqrt{x}$.

75. ¿Es $\lim_{x\to 0.25} \sqrt{x} = 0.5$ una afirmación verdadera? Explicar la respuesta.

76. ¿Es $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ una afirmación verdadera? Explicar la respuesta.

77. Utilizar una herramienta de graficación para evaluar el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} nx}{x}$, para diferentes valores de n. ¿Qué se observa?

78. Utilizar una herramienta de graficación para evaluar el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\tan nx}{x}$, para diferentes valores de n. ¿Qué se observa?

79. Demostrar que si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$, ese límite debe ser único. [*Sugerencia*: Sea

$$\lim_{x\to c} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} f(x) = L_2$$

y demostrar que $L_1 = L_2$.]

80. Considerar la recta $f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$. Aplicando la definición ε-δ de límite, demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = mc + b$.

81. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ es equivalente a $\lim_{x\to c} [f(x) - L] = 0$.

82. *a*) Dado que

$$\lim_{x\to 0} (3x+1)(3x-1)x^2 + 0.01 = 0.01$$

demostrar que existe un intervalo abierto (a, b) que contiene al 0, tal que $(3x + 1)(3x - 1)x^2 + 0.01 > 0$ para todas las $x \neq 0$ en (a, b).

b) Dado que $\lim_{x\to c} g(x) = L$, donde $L > 0$, demostrar que existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, tal que $g(x) > 0$ para todos los $x \neq c$ en (a, b).

83. ***Programación*** En una herramienta de graficación programable, escribir un programa que estime $\lim_{x\to c} f(x)$.
Suponer que el programa sólo se aplicará a funciones cuyo límite existe cuando x se aproxima a c. Sea $y_1 = f(x)$, generar dos listas cuyas entradas formen los pares ordenados

$$(c \pm [0.1]^n, f(c \pm [0.1]^n))$$

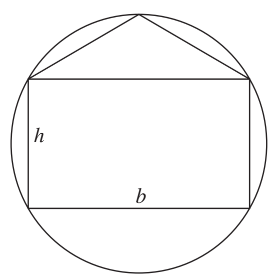
para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.

84. ***Programación*** Utilizar el programa elaborado en el ejercicio 83 para estimar el límite

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}.$$

Preparación del examen Putnam

85. Inscribir en un círculo con radio 1 un rectángulo con base b y altura h, y un triángulo isósceles con base b, como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de h tienen la misma área el rectángulo y el triángulo?



86. Un cono recto tiene una base con radio 1 y una altura de 3. Se inscribe un cubo dentro de él, de tal manera que una de las caras del cubo queda contenida en la base del cono. ¿Cuál es la longitud lateral del cubo?

Este problema fue preparado por el Committee on the Putman Prize Competition.

1.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar los límites de manera visual.

1. $h(x) = -x^2 + 4x$
   a) $\lim_{x\to 4} h(x)$
   b) $\lim_{x\to -1} h(x)$

2. $g(x) = \dfrac{12(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$
   a) $\lim_{x\to 4} g(x)$
   b) $\lim_{x\to 0} g(x)$

3. $f(x) = x \cos x$
   a) $\lim_{x\to 0} f(x)$
   b) $\lim_{x\to \pi/3} f(x)$

4. $f(t) = t|t - 4|$
   a) $\lim_{t\to 4} f(t)$
   b) $\lim_{t\to -1} f(t)$

En los ejercicios 5 a 22, calcular el límite.

5. $\lim_{x\to 2} x^3$
6. $\lim_{x\to -2} x^4$
7. $\lim_{x\to 0} (2x - 1)$
8. $\lim_{x\to -3} (3x + 2)$
9. $\lim_{x\to -3} (x^2 + 3x)$
10. $\lim_{x\to 1} (-x^2 + 1)$
11. $\lim_{x\to -3} (2x^2 + 4x + 1)$
12. $\lim_{x\to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$
13. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x + 1}$
14. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x + 4}$
15. $\lim_{x\to -4} (x + 3)^2$
16. $\lim_{x\to 0} (2x - 1)^3$
17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x}$
18. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2}{x + 2}$
19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2 + 4}$
20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x - 3}{x + 5}$
21. $\lim_{x\to 7} \dfrac{3x}{\sqrt{x + 2}}$
22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 4}$

En los ejercicios 23 a 26, encontrar los límites.

23. $f(x) = 5 - x,\ g(x) = x^3$
   a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

24. $f(x) = x + 7,\ g(x) = x^2$
   a) $\lim_{x\to -3} f(x)$ b) $\lim_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim_{x\to -3} g(f(x))$

25. $f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = \sqrt{x + 1}$
   a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim_{x\to 3} g(x)$ c) $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

26. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x + 6}$
   a) $\lim_{x\to 4} f(x)$ b) $\lim_{x\to 21} g(x)$ c) $\lim_{x\to 4} g(f(x))$

En los ejercicios 27 a 36, encontrar el límite de la función trigonométrica.

27. $\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen} x$
28. $\lim_{x\to \pi} \tan x$
29. $\lim_{x\to 1} \cos \dfrac{\pi x}{3}$
30. $\lim_{x\to 2} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$
31. $\lim_{x\to 0} \sec 2x$
32. $\lim_{x\to \pi} \cos 3x$
33. $\lim_{x\to 5\pi/6} \operatorname{sen} x$
34. $\lim_{x\to 5\pi/3} \cos x$
35. $\lim_{x\to 3} \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$
36. $\lim_{x\to 7} \sec\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$

En los ejercicios 37 a 40, utilizar la información que se expone para evaluar los límites.

37. $\lim_{x\to c} f(x) = 3$
   $\lim_{x\to c} g(x) = 2$
   a) $\lim_{x\to c} [5g(x)]$
   b) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$
   c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]$
   d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

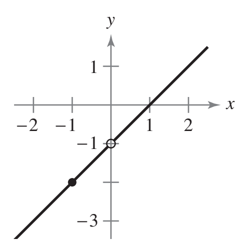
38. $\lim_{x\to c} f(x) = \frac{3}{2}$
   $\lim_{x\to c} g(x) = \frac{1}{2}$
   a) $\lim_{x\to c} [4f(x)]$
   b) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$
   c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]$
   d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

39. $\lim_{x\to c} f(x) = 4$
   a) $\lim_{x\to c} [f(x)]^3$
   b) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)}$
   c) $\lim_{x\to c} [3f(x)]$
   d) $\lim_{x\to c} [f(x)]^{3/2}$

40. $\lim_{x\to c} f(x) = 27$
   a) $\lim_{x\to c} \sqrt[3]{f(x)}$
   b) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{18}$
   c) $\lim_{x\to c} [f(x)]^2$
   d) $\lim_{x\to c} [f(x)]^{2/3}$

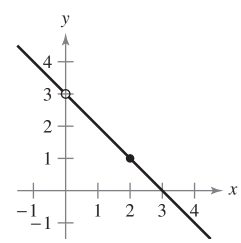
En los ejercicios 41 a 44, utilizar la gráfica para determinar el límite (si existe) de manera visual. Escribir una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto.

41. $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$



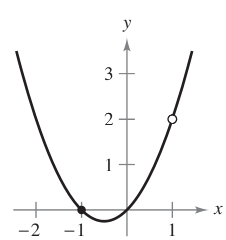
   a) $\lim_{x\to 0} g(x)$
   b) $\lim_{x\to -1} g(x)$

42. $h(x) = \dfrac{-x^2 + 3x}{x}$



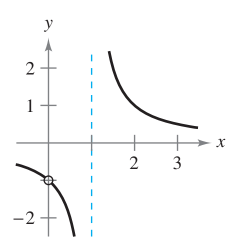
   a) $\lim_{x\to 2} h(x)$
   b) $\lim_{x\to 0} h(x)$

43. $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$



   a) $\lim_{x\to 1} g(x)$
   b) $\lim_{x\to -1} g(x)$

44. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$



   a) $\lim_{x\to 1} f(x)$
   b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar el límite de la función (si existe). Escribir una función más simple que coincida con la dada salvo en un punto. Utilizar una herramienta de graficación para confirmar el resultado.

45. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

46. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$

47. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

48. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

En los ejercicios 49 a 64, encontrar el límite (si existe).

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2-x}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x^2+2x}$

51. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-16}$

52. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{x^2-9}$

53. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

54. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$

55. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

56. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

57. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

59. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1/(3+x)]-(1/3)}{x}$

60. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1/(x+4)]-(1/4)}{x}$

61. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$

62. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

63. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+1-(x^2-2x+1)}{\Delta x}$

64. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

En los ejercicios 65 a 76, determinar el límite (si existe) de la función trigonométrica.

65. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{5x}$

66. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(1-\cos x)}{x}$

67. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^2}$

68. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta\tan\theta}{\theta}$

69. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

70. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$

71. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1-\cos h)^2}{h}$

72. $\lim\limits_{\phi\to \pi} \phi\sec\phi$

73. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

74. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

75. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$

76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ $\left[\textit{Sugerencia}\text{: Encontrar } \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\left(\dfrac{3x}{3\operatorname{sen} 3x}\right).\right]$

Análisis gráfico, numérico y analítico **En los ejercicios 77 a 84, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar el límite. Emplear una tabla para respaldar la conclusión. Posteriormente, calcular el límite empleando métodos analíticos.**

77. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

78. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{x-16}$

79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1/(2+x)]-(1/2)}{x}$

80. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2}$

81. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{t}$

82. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{2x^2}$

83. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

84. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

En los ejercicios 85 a 88, encontrar $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

85. $f(x) = 3x - 2$

86. $f(x) = \sqrt{x}$

87. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

88. $f(x) = x^2 - 4x$

En los ejercicios 89 y 90, utilizar el teorema del encaje para calcular $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

89. $c = 0$

$4 - x^2 \le f(x) \le 4 + x^2$

90. $c = a$

$b - |x-a| \le f(x) \le b + |x-a|$

En los ejercicios 91 a 96, utilizar una herramienta de graficación para representar la función dada y las ecuaciones $y = |x|$ y $y = -|x|$ en una misma ventana. Usando las gráficas para visualizar el teorema del encaje, calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

91. $f(x) = x\cos x$

92. $f(x) = |x\operatorname{sen} x|$

93. $f(x) = |x|\operatorname{sen} x$

94. $f(x) = |x|\cos x$

95. $f(x) = x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

96. $h(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$

Desarrollo de conceptos

97. En el contexto del cálculo de límites, analizar qué se quiere decir mediante las funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

98. Elaborar un ejemplo de funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

99. ¿Qué se quiere decir con indeterminación o forma indeterminada?

100. Explicar el teorema del encaje.

101. ***Redacción*** Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación de

$$f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 1.$$

102. *Redacción* Utilizar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = x,\ g(x) = \operatorname{sen}^2 x \text{ y } h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Objeto en caída libre **En los ejercicios 103 y 104, utilizar la función de posición $s(t) = -16t^2 + 500$, que da la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo t segundos desde una altura de 500 pies. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

103. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿a qué velocidad estará cayendo luego de 5 segundos?

104. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿cuánto tiempo tardará ésta en llegar al suelo? ¿A qué velocidad se producirá el impacto?

Objeto en caída libre **En los ejercicios 105 y 106, utilizar la función de posición $s(t) = -4.9t^2 + 200$, que da la altura (en metros) de un objeto que cae desde una altura de 200 m. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

105. Determinar la velocidad del objeto cuando $t = 3$.

106. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

107. Encontrar dos funciones f y g tales que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existan, pero sí $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$, si existe.

108. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ tampoco existe.

109. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.1.

110. Demostrar la propiedad 3 del teorema 1.1. (Se puede utilizar la propiedad 3 del teorema 1.2).

111. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.2.

112. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$.

113. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ y $|g(x)| \le M$ para un número fijo M y todas las $x \neq c$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

114. *a*) Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$.

(*Nota*: Este ejercicio es inverso al del problema 112.)

b) Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$.

[*Sugerencia*: Utilizar la desigualdad $||f(x)| - |L|| \le |f(x) - L|$.]

115. *Para pensar* Encontrar una función f que muestre que el recíproco del ejercicio 114*b* no es verdadero. [*Sugerencia*: Buscar una función f tal que $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$, pero donde $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no exista.]

Para discusión

116. Sea $f(x) = \begin{cases} 3, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$. Encontrar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 117 a 122, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

117. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$

118. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

119. Si $f(x) = g(x)$ para todos los números reales distintos a $x = 0$, y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L$.

120. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

121. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, donde $f(x) = \begin{cases} 3, & x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

122. Si $f(x) < g(x)$ para todas las $x \neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

123. Demostrar la segunda parte del teorema 1.9 probando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

124. Sean $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

y

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ x, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Calcular (si es posible) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

125. *Razonamiento gráfico* Considerar $f(x) = \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$.

a) Determinar el dominio de f.

b) Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación de f. ¿Resulta evidente el dominio de f a partir de la gráfica? Si no es así, explicar por qué.

c) Utilizar la gráfica f para calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

d) Confirmar la respuesta del apartado *c*) utilizando el método analítico.

126. *Aproximación*

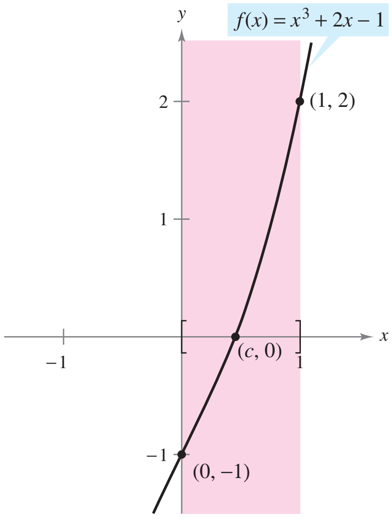
a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

b) Utilizar el resultado del apartado anterior para obtener la aproximación $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ para x cercanas a 0.

c) Aplicar el resultado del apartado *b*) para estimar cos (0.1).

d) Utilizar una herramienta de graficación para estimar cos (0.1) con cuatro decimales. Comparar el resultado con el del apartado *c*).

127. *Para pensar* Al utilizar una herramienta de graficación para generar una tabla con el fin de estimar $\lim\limits_{x\to 0} [(\operatorname{sen} x)/x]$, un estudiante concluye que el límite, y no 1, era 0.01745. Determinar la probable causa del error.



f es continua en [0,1] con $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$
Figura 1.37

EJEMPLO 8 Una aplicación del teorema del valor intermedio

Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo [0, 1].

Solución Observar que *f* es continua en el intervalo cerrado [0, 1]. Dado que

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

resulta que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Por tanto, se puede aplicar el teorema del valor intermedio y concluir que debe existir algún c en [0, 1] tal que

$$f(c) = 0 \qquad f \text{ tiene un cero en el intervalo cerrado } [0, 1].$$

como se muestra en la figura 1.37.

El **método de bisección** para estimar los ceros reales de una función continua es parecido al método empleado en el ejemplo 8. Si se sabe que existe un cero en el intervalo cerrado $[a, b]$, dicho cero debe pertenecer al intervalo $[a, (a + b)/2]$ o $[(a + b)/2, b]$. A partir del signo de $f([a + b]/2)$, se puede determinar cuál intervalo contiene al cero. Mediante bisecciones sucesivas del intervalo, se puede "atrapar" al cero de la función.

TECNOLOGÍA También se puede usar el *zoom* de una herramienta de graficación para estimar los ceros reales de una función continua. Al hacer acercamientos de forma repetida a la zona donde la gráfica corta al eje x y ajustar la escala de dicho eje, se puede estimar el cero de la función con la precisión deseada. El cero de $x^3 + 2x - 1$ es alrededor de 0.453, como se muestra en la figura 1.38.

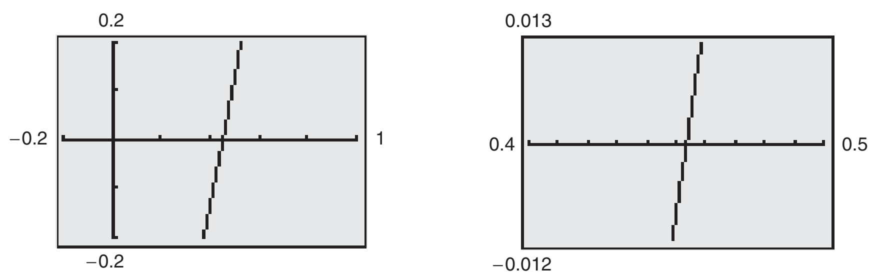
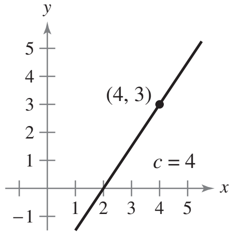


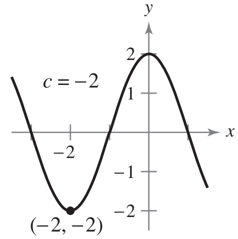
Figura 1.38 Aplicación del *zoom* al cero de $f(x) = x^3 + 2x - 1$

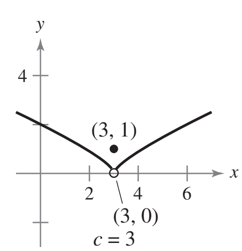
1.4 Ejercicios

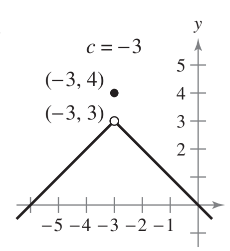
En los ejercicios 1 a 6, utilizar una herramienta de graficación para determinar el límite y analizar la continuidad de la función.

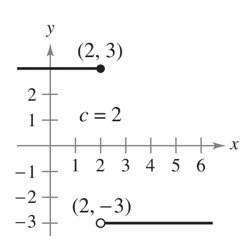
a) $\lim_{x \to c^+} f(x)$ *b)* $\lim_{x \to c^-} f(x)$ *c)* $\lim_{x \to c} f(x)$

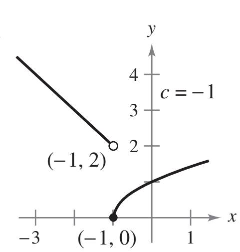
1.


2.


3.


4.


5.


6.


En los ejercicios 7 a 26, calcular el límite (si existe). Si no existe, explicar por qué.

7. $\lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{1}{x+8}$

8. $\lim\limits_{x \to 5^-} -\dfrac{3}{x+5}$

9. $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

10. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

11. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

12. $\lim\limits_{x \to 9^-} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

13. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

14. $\lim\limits_{x \to 10^+} \dfrac{|x-10|}{x-10}$

15. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x}$

16. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x - (x^2+x)}{\Delta x}$

17. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & x \le 3 \\ \dfrac{12-2x}{3}, & x > 3 \end{cases}$

18. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+6, & x < 2 \\ -x^2+4x-2, & x \ge 2 \end{cases}$

19. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x < 1 \\ x+1, & x \ge 1 \end{cases}$

20. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 1-x, & x > 1 \end{cases}$

21. $\lim\limits_{x \to \pi} \cot x$

22. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \sec x$

23. $\lim\limits_{x \to 4^-} (5[\![x]\!] - 7)$

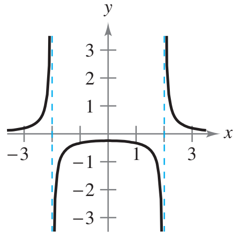
24. $\lim\limits_{x \to 2^+} (2x - [\![x]\!])$

25. $\lim\limits_{x \to 3} (2 - [\![-x]\!])$

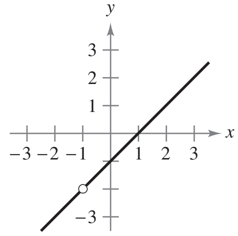
26. $\lim\limits_{x \to 1} \left(1 - \left[\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\right]\right)$

En los ejercicios 27 a 30, analizar la continuidad de cada función.

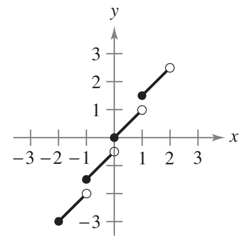
27. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$



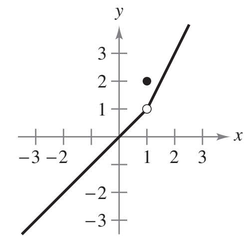
28. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$



29. $f(x) = \frac{1}{2}[\![x]\!] + x$



30. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$



En los ejercicios 31 a 34, analizar la continuidad de la función en el intervalo cerrado.

	Función	*Intervalo*
31.	$g(x) = \sqrt{49-x^2}$	$[-7, 7]$
32.	$f(t) = 3 - \sqrt{9-t^2}$	$[-3, 3]$
33.	$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \le 0 \\ 3+\frac{1}{2}x, & x > 0 \end{cases}$	$[-1, 4]$
34.	$g(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$	$[-1, 2]$

En los ejercicios 35 a 60, encontrar los valores de *x* (si existe alguno) en los que *f* no es continua. ¿Cuáles discontinuidades son evitables o removibles?

35. $f(x) = \dfrac{6}{x}$

36. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

37. $f(x) = x^2 - 9$

38. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

39. $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$

40. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

41. $f(x) = 3x - \cos x$

42. $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$

43. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x}$

44. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

45. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

46. $f(x) = \dfrac{x-6}{x^2-36}$

47. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

48. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

49. $f(x) = \dfrac{|x+7|}{x+7}$

50. $f(x) = \dfrac{|x-8|}{x-8}$

51. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x < 1 \\ x^2, & x \ge 1 \end{cases}$

53. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 2 \end{cases}$

55. $f(x) = \begin{cases} \tan \dfrac{\pi x}{4}, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} \csc \dfrac{\pi x}{6}, & |x - 3| \leq 2 \\ 2, & |x - 3| > 2 \end{cases}$

57. $f(x) = \csc 2x$

58. $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{2}$

59. $f(x) = [\![x - 8]\!]$

60. $f(x) = 5 - [\![x]\!]$

En los ejercicios 61 y 62, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. A partir de la gráfica, estimar

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

¿Es continua la función en toda la recta real? Explicar la respuesta.

61. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|x}{x + 2}$

62. $f(x) = \dfrac{|x^2 + 4x|(x + 2)}{x + 4}$

En los ejercicios 63 a 68, encontrar la constante *a*, o las constantes *a* y *b*, tales que la función sea continua en toda la recta real.

63. $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 1 \\ ax - 4, & x < 1 \end{cases}$

64. $f(x) = \begin{cases} 3x^3, & x \leq 1 \\ ax + 5, & x > 1 \end{cases}$

65. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$

66. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x}, & x < 0 \\ a - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$

67. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$

68. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \neq a \\ 8, & x = a \end{cases}$

En los ejercicios 69 a 72, analizar la continuidad de la función compuesta $h(x) = f(g(x))$.

69. $f(x) = x^2$

$g(x) = x - 1$

70. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$g(x) = x - 1$

71. $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$

$g(x) = x^2 + 5$

72. $f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = x^2$

En los ejercicios 73 a 76, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Usar la gráfica para determinar todo valor de *x* en donde la función no sea continua.

73. $f(x) = [\![x]\!] - x$

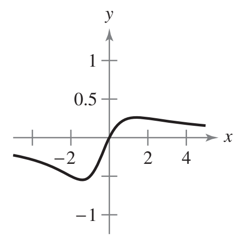
74. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

75. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x > 4 \\ 2x - 5, & x \leq 4 \end{cases}$

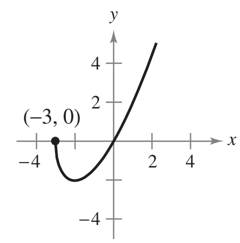
76. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x}, & x < 0 \\ 5x, & x \geq 0 \end{cases}$

En los ejercicios 77 a 80, describir el o los intervalos en los que la función es continua.

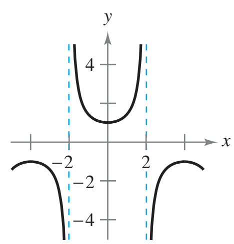
77. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 2}$



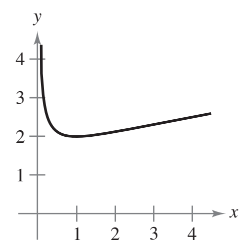
78. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$



79. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$



80. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$



Redacción **En los ejercicios 81 y 82, utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo $[-4, 4]$. ¿Parece continua en este intervalo la gráfica de la función? ¿Es continua la función en $[-4, 4]$? Escribir unas líneas sobre la importancia de examinar una función analíticamente, además de hacerlo de manera gráfica.**

81. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

82. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

Redacción **En los ejercicios 83 a 86, explicar por qué la función tiene un cero en el intervalo dado.**

	Función	*Intervalo*
83.	$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4$	$[1, 2]$
84.	$f(x) = x^3 + 5x - 3$	$[0, 1]$
85.	$f(x) = x^2 - 2 - \cos x$	$[0, \pi]$
86.	$f(x) = -\dfrac{5}{x} + \tan\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)$	$[1, 4]$

En los ejercicios 87 a 90, utilizar el teorema del valor intermedio y una herramienta de graficación para estimar el cero de la función en el intervalo [0, 1]. Realizar acercamientos de forma repetida en la gráfica de la función con el fin de determinar el cero con una precisión de dos cifras decimales. Emplear la función *cero* o *raíz* de su herramienta de graficación para estimar el cero con una precisión de cuatro cifras decimales.

87. $f(x) = x^3 + x - 1$

88. $f(x) = x^3 + 5x - 3$

89. $g(t) = 2 \cos t - 3t$

90. $h(\theta) = 1 + \theta - 3 \tan \theta$

En los ejercicios 91 a 94, verificar que el teorema del valor intermedio es aplicable al intervalo indicado y encontrar el valor de *c* garantizado por el teorema.

91. $f(x) = x^2 + x - 1, \quad [0, 5], \quad f(c) = 11$

92. $f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3], \quad f(c) = 0$

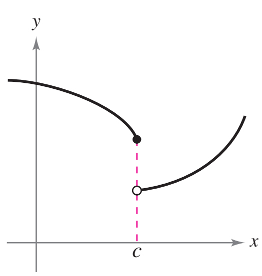
93. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2, \quad [0, 3], \quad f(c) = 4$

94. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}, \quad \left[\dfrac{5}{2}, 4\right], \quad f(c) = 6$

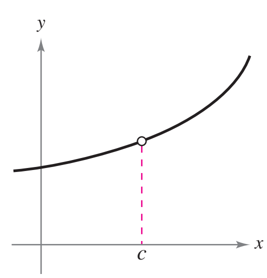
Desarrollo de conceptos

95. En cada una de las gráficas siguientes especificar cómo se destruye la continuidad en $x = c$:

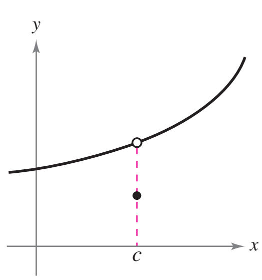
a)



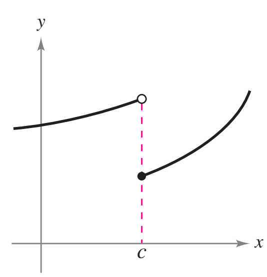
b)



c)



d)



96. Esbozar la gráfica de cualquier función f tal que:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 0.$$

¿Esta función es continua en $x = 3$? Explicar la respuesta.

97. Si las funciones f y g son continuas para todos los x reales, ¿$f + g$ es siempre continua para todos los x reales? ¿f/g es siempre continua para todos los x reales? Si alguna no es continua, elaborar un ejemplo para verificar la conclusión.

Para discusión

98. Describir la diferencia que existe entre una discontinuidad removible y una no removible. En la explicación, incluir ejemplos de las siguientes descripciones:

a) Una función con una discontinuidad no evitable en $x = 4$.

b) Una función con una discontinuidad evitable en $x = -4$.

c) Una función que cuenta con las dos características descritas en los incisos *a)* y *b)*.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 102, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

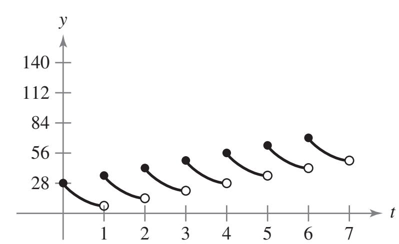
99. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $f(c) = L$, entonces f es continua en c.

100. Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq c$ y $f(c) \neq g(c)$, entonces ya sea f o g no es continua en c.

101. En una función racional puede haber infinitos valores de x en los que no es continua.

102. La función $f(x) = |x - 1|/(x - 1)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

103. ***Piscina*** Todos los días se disuelven 28 onzas de cloro en el agua de una piscina. En la gráfica se muestra la cantidad de cloro $f(t)$ en esa agua luego de t días.



Estimar e interpretar $\lim_{t \to 4^-} f(t)$ y $\lim_{t \to 4^+} f(t)$.

104. ***Para pensar*** Describir en qué difieren las funciones

$$f(x) = 3 + [\![x]\!]$$

y

$$g(x) = 3 - [\![-x]\!].$$

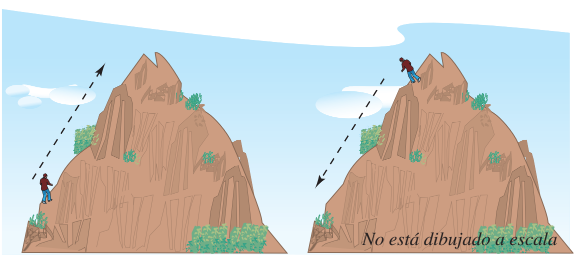
105. ***Tarifas telefónicas*** Una llamada de larga distancia entre dos ciudades cuesta \$0.40 los primeros 10 minutos y \$0.05 por cada minuto o fracción adicional. Utilizar la función parte entera o mayor entero para expresar el costo C de una llamada en términos del tiempo t (en minutos). Dibujar la gráfica de esta función y analizar su continuidad.

106. ***Gestión de inventarios*** El número de unidades en inventario en una pequeña empresa está dado por

$$N(t) = 25\left(2\left[\!\left[\frac{t+2}{2}\right]\!\right] - t\right)$$

donde t representa el tiempo en meses. Dibujar la gráfica de esta función y analizar su continuidad. ¿Con qué frecuencia la empresa debe reponer existencias?

107. ***Déjà vu*** Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. Demostrar que el hombre está en lo cierto. [*Sugerencia*: Considerar que $s(t)$ y $r(t)$ son las funciones de posición de subida y bajada y aplicar el teorema del valor intermedio a la función $f(t) = s(t) - r(t)$.]



Sábado 8:00 de la mañana Domingo 8:00 de la mañana

108. ***Volumen*** Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que entre todas las esferas cuyos radios pertenecen al intervalo [5, 8] hay una con un volumen de 1 500 centímetros cúbicos.

109. Demostrar que si f es continua y carece de ceros en $[a, b]$, entonces

$f(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$ o $f(x) < 0$ para todo x en $[a, b]$.

110. Demostrar que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es continua para ningún número real.

111. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ kx, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es continua sólo en $x = 0$ (suponer que k es cualquier número real distinto de cero).

112. La **función signo** se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Construir la gráfica de sgn(x) y calcular los siguientes límites (si es posible).

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$

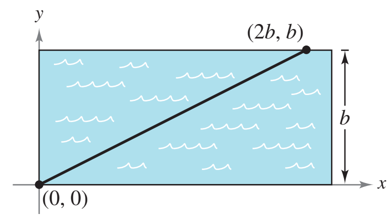
113. ***Modelo matemático*** La tabla recoge valores de la velocidad S (en pies/s) de un objeto tras caer t segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
S	0	48.2	53.5	55.2	55.9	56.2	56.3

a) Construir la curva con los datos.

b) ¿Parece existir una velocidad límite para el objeto? En caso afirmativo, identificar una posible causa.

114. ***Elaboración de modelos*** Un nadador cruza una piscina de una anchura b nadando en línea recta desde (0, 0) hasta (2b, b) (ver la figura).



a) Sea f una función definida como la coordenada y del punto sobre el lado más largo de la piscina que se encuentra más cerca del nadador en cualquier momento dado durante su trayecto a través de la piscina. Encontrar la función f y construir su gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explicar la respuesta.

b) Sea g la distancia mínima entre el nadador y el lado más largo de la piscina. Encontrar la función g y construir la gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explicar la respuesta.

115. Encontrar todos los valores de c tales que f sea continua en $(-\infty, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \le c \\ x, & x > c \end{cases}$$

116. Demostrar que para todo número real y existe un x en $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan x = y$.

117. Sea $f(x) = \left(\sqrt{x + c^2} - c\right)/x,\ c > 0$. ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cómo se puede definir f en $x = 0$ con el fin de que sea continua en ese punto?

118. Demostrar que si $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c + \Delta x) = f(c)$, entonces f es continua en c.

119. Analizar la continuidad de la función $h(x) = x[\![x]\!]$.

120. *a*) Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Si $f_1(a) < f_2(a)$ y $f_1(b) > f_2(b)$, demostrar que entre a y b existe c tal que $f_1(c) = f_2(c)$.

b) Demostrar que existe c en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos x = x$. Utilizar una herramienta de graficación para estimar c con tres decimales.

Preparación del examen Putnam

121. Afirmar o desmentir: si x y y son números reales con $y \ge 0$ y $y(y + 1) \le (x + 1)^2$, entonces $y(y - 1) \le x^2$.

122. Encontrar todas las polinomiales $P(x)$ tales que

$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$ y $P(0) = 0$.

1.5 Ejercicios

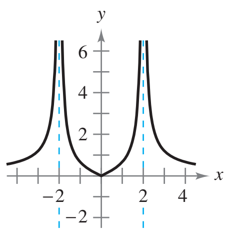
En los ejercicios 1 a 4, determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a 4 por la izquierda y por la derecha.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ **2.** $f(x) = \dfrac{-1}{x-4}$

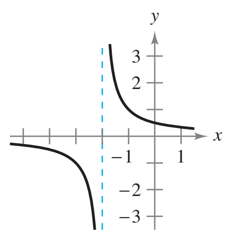
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$ **4.** $f(x) = \dfrac{-1}{(x-4)^2}$

En los ejercicios 5 a 8, determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -2 por la izquierda y por la derecha.

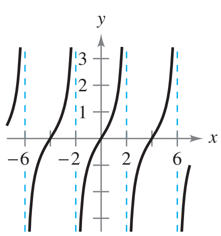
5. $f(x) = 2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right|$



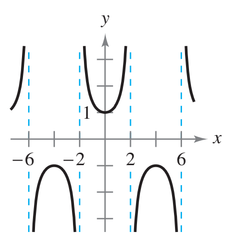
6. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$



7. $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{4}$



8. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$



Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 9 a 12, completar la tabla para determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -3 por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y corroborar la respuesta.**

x	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$				

x	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$				

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ **10.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

11. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ **12.** $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{6}$

En los ejercicios 13 a 32, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **14.** $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ **16.** $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+4}$

17. $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2+1}$ **18.** $h(s) = \dfrac{2s-3}{s^2-25}$

19. $h(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$ **20.** $g(x) = \dfrac{2+x}{x^2(1-x)}$

21. $T(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$ **22.** $g(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x}{3x^2 - 6x - 24}$

23. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

24. $f(x) = \dfrac{4x^2+4x-24}{x^4-2x^3-9x^2+18x}$

25. $g(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$ **26.** $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^3-5x^2+x-5}$ **28.** $h(t) = \dfrac{t^2-2t}{t^4-16}$

29. $f(x) = \tan \pi x$ **30.** $f(x) = \sec \pi x$

31. $s(t) = \dfrac{t}{\operatorname{sen} t}$ **32.** $g(\theta) = \dfrac{\tan \theta}{\theta}$

En los ejercicios 33 a 36, determinar si la función tiene una asíntota vertical o una discontinuidad evitable (o removible) en $x = -1$. Representar la función en una herramienta de graficación para confirmar la respuesta.

33. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ **34.** $f(x) = \dfrac{x^2-6x-7}{x+1}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ **36.** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+1)}{x+1}$

En los ejercicios 37 a 54, calcular el límite.

37. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1}$ **38.** $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$ **40.** $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2+x}{1-x}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2}$ **42.** $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2}{x^2+16}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{x+3}{x^2+x-6}$ **44.** $\displaystyle\lim_{x\to(-1/2)^+} \frac{6x^2+x-1}{4x^2-4x-3}$

45. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}$ **46.** $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x^2}$

47. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ **48.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\operatorname{sen} x}$ **50.** $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{-2}{\cos x}$

51. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt{x}}{\csc x}$ **52.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{\cot x}$

53. $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} x \sec \pi x$ **54.** $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} x^2 \tan \pi x$

En los ejercicios 55 a 58, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y determinar el límite lateral.

55. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

56. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

57. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 25}$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

58. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{8}$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

Desarrollo de conceptos

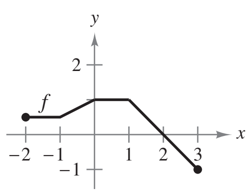
59. Con sus propias palabras, describir el significado de un límite infinito. ¿Es ∞ un número real?

60. Con sus propias palabras, describir el significado de la asíntota vertical de una gráfica.

61. Escribir una función racional con asíntotas verticales en $x = 6$ y en $x = -2$ y un cero en $x = 3$.

62. ¿Tiene toda función racional una asíntota vertical? Explicar la respuesta.

63. Utilizar la gráfica de la función f (ver la figura) para construir la gráfica de $g(x) = 1/f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$.



Para discusión

64. Dado un polinomio $p(x)$, ¿será verdad que la gráfica de una función dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{x - 1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$? ¿Por qué sí o por qué no?

65. ***Relatividad*** De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de una partícula depende de su velocidad v; es decir:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

donde m_0 es la masa cuando la partícula está en reposo y c es la velocidad de la luz. Calcular el límite de la masa cuando v tiende a c^-.

66. ***Ley de Boyle*** En un gas a temperatura constante, la presión P es inversamente proporcional al volumen V. Calcular el límite de P cuando $V \to 0^+$.

67. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Una patrulla está estacionada a 50 pies de un gran almacén (ver la figura). La luz giratoria de la parte superior del automóvil gira a un ritmo o velocidad de $\frac{1}{2}$ revolución por segundo. El ritmo o velocidad al que se desplaza el haz de luz a lo largo de la pared es $r = 50\pi \sec^2 \theta$ pies/s.

a) Calcular el ritmo o velocidad r cuando θ es $\pi/6$.
b) Determinar el ritmo o velocidad r cuando θ es $\pi/3$.
c) Encontrar el límite de r cuando $\theta \to (\pi/2)^-$.

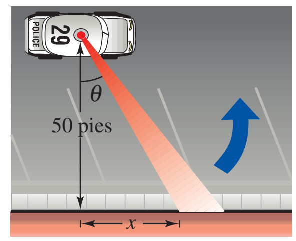


Figura para problema 67

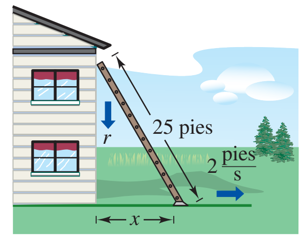


Figura para problema 68

68. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Una escalera de 25 pies de largo está apoyada en una casa (ver la figura). Si por alguna razón la base de la escalera se aleja del muro a un ritmo de 2 pies por segundo, la parte superior descenderá con un ritmo dado por

$$r = \frac{2x}{\sqrt{625 - x^2}} \text{ pies/s}$$

donde x es la distancia que hay entre la base de la escalera y el muro.

a) Calcular el ritmo o velocidad r cuando x es 7 pies.
b) Calcular el ritmo o velocidad r cuando x es 15 pies.
c) Encontrar el límite de r cuando $x \to 25^-$.

69. ***Velocidad media*** En un viaje de d millas hacia otra ciudad, la velocidad media de un camión fue de x millas por hora. En el viaje de regreso, su velocidad media fue de y millas por hora. La velocidad media del viaje de ida y vuelta fue de 50 millas por hora.

a) Verificar que $y = \dfrac{25x}{x - 25}$. ¿Cuál es el dominio?

b) Completar la tabla.

x	30	40	50	60
y				

¿Difieren los valores de y de los esperados? Explicar la respuesta.

c) Calcular el límite de y cuando $x \to 25^+$ e interpretar el resultado.

70. ***Análisis numérico y gráfico*** Utilizar una herramienta de graficación a fin de completar la tabla para cada función y representar gráficamente cada una de ellas con objeto de calcular el límite. ¿Cuál es el valor del límite cuando la potencia de x en el denominador es mayor que 3?

x	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$							

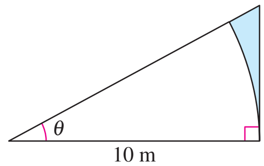
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^4}$

71. ***Análisis numérico y gráfico*** Considerar la región sombreada que queda fuera del sector del círculo con radio de 10 m y dentro del triángulo rectángulo de la figura.



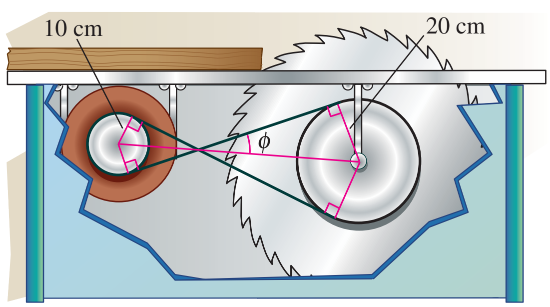
a) Expresar el área $A = f(\theta)$ de la región en función de θ. Determinar el dominio de esta función.

b) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla y representar la función sobre el dominio apropiado.

$\boldsymbol{\theta}$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$\boldsymbol{f(\theta)}$					

c) Calcular el límite de A cuando $\theta \to (\pi/2)^-$.

72. ***Análisis numérico y gráfico*** Una banda en cruz conecta la polea de 20 cm (10 cm de radio) de un motor eléctrico con otra polea de 40 cm (20 cm de radio) de una sierra circular. El motor eléctrico gira a 1 700 revoluciones por minuto.



a) Determinar el número de revoluciones por minuto de la sierra.

b) ¿Cómo afecta el cruce de la banda a la sierra en relación con el motor?

c) Sea L la longitud total de la correa. Expresé L en función de ϕ, donde ϕ se mide en radianes. ¿Cuál es el dominio de la función? [*Sugerencia*: Sumar las longitudes de los tramos rectos de la banda y las longitudes de la banda alrededor de cada polea.]

d) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla.

$\boldsymbol{\phi}$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$\boldsymbol{L}$					

e) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función en un dominio apropiado.

f) Calcular el $\lim\limits_{\phi \to (\pi/2)^-} L$. Utilizar algún argumento geométrico como base de otro procedimiento para encontrar este límite.

g) Calcular $\lim\limits_{\phi \to 0^+} L$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 73 a 76, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

73. La gráfica de una función racional tiene al menos una asíntota vertical.

74. Las funciones polinomiales carecen de asíntotas verticales.

75. Las gráficas de funciones trigonométricas carecen de aísntotas verticales.

76. Si f tiene una asíntota vertical en $x = 0$, entonces no está definida en $x = 0$.

77. Encontrar a continuación las funciones f y g tales que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$, pero $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] \neq 0$.

78. Demostrar las propiedades restantes del teorema 1.15.

79. Demostrar que si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

80. Demostrar que si $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, entonces el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe.

Límites infinitos **En los ejercicios 81 y 82, usar la definición ε-δ de límite para demostrar lo afirmado**

81. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 3} = \infty$

82. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x - 5} = -\infty$

PROYECTO DE TRABAJO

Gráficas y límites de las funciones trigonométricas

Recordando, del teorema 1.9, que el límite de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ cuando x tiende a 0 es 1:

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función f en el intervalo $-\pi \leq 0 \leq \pi$ y explicar cómo ayuda esta gráfica a confirmar dicho teorema.

b) Explicar cómo podría usar una tabla de valores para confirmar numéricamente el valor de este límite.

c) Dibujar a mano la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen} x$. Trazar una recta tangente en el punto (0, 0) y estimar visualmente su pendiente.

d) Sea $(x, \operatorname{sen} x)$ un punto en la gráfica de g cercano a (0, 0). Escribir una fórmula para la pendiente de la recta secante que une a $(x, \operatorname{sen} x)$ con (0, 0). Evaluar esta fórmula para $x = 0.1$ y $x = 0.01$. Después encontrar la pendiente exacta de la recta tangente a g en el punto (0, 0).

e) Dibujar la gráfica de la función coseno, $h(x) = \cos x$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto (0, 1)? Utilizar límites para calcular analíticamente dicha pendiente.

f) Calcular la pendiente de la recta tangente a $k(x) = \tan x$ en el punto (0, 0).

1 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, determinar si el problema se puede resolver usando conocimientos previos al cálculo, o si se requiere el cálculo. Resolver el problema si se puede utilizar precálculo. En caso de que sea necesario el cálculo, explicar por qué. Encontrar la solución usando un método gráfico o numérico.

1. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la curva $y = x^2$.

2. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la recta $y = 4x - 3$.

En los ejercicios 3 y 4, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y corroborar el resultado.

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[4/(x+2)] - 2}{x}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right)}{x}$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar el límite L. Después utilizar la definición ε-δ para demostrar que el límite es L.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x + 4)$

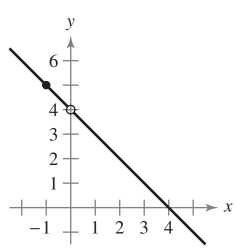
6. $\displaystyle\lim_{x\to 9} \sqrt{x}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 2} (1 - x^2)$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 5} 9$

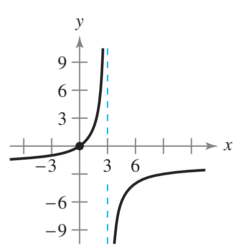
En los ejercicios 9 y 10, utilizar la gráfica para determinar cada límite.

9. $h(x) = \dfrac{4x - x^2}{x}$



a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to -1} h(x)$

10. $g(x) = \dfrac{-2x}{x - 3}$



a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} g(x)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$

En los ejercicios 11 a 26, encontrar el límite (si existe).

11. $\displaystyle\lim_{x\to 6} (x - 2)^2$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 7} (10 - x)^4$

13. $\displaystyle\lim_{t\to 4} \sqrt{t + 2}$

14. $\displaystyle\lim_{y\to 4} 3|y - 1|$

15. $\displaystyle\lim_{t\to -2} \frac{t + 2}{t^2 - 4}$

16. $\displaystyle\lim_{t\to 3} \frac{t^2 - 9}{t - 3}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{x - 4}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[1/(x+1)] - 1}{x}$

20. $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{\left(1/\sqrt{1+s}\right) - 1}{s}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{4x}{\tan x}$

25. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\operatorname{sen}[(\pi/6) + \Delta x] - (1/2)}{\Delta x}$

[*Sugerencia:* $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi$]

26. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(\pi + \Delta x) + 1}{\Delta x}$

[*Sugerencia:* $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$]

En los ejercicios 27 a 30, calcular el límite, dado que $\lim_{x\to c} f(x) = -\frac{3}{4}$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \frac{2}{3}$.

27. $\displaystyle\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]$

28. $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to c} [f(x) + 2g(x)]$

29. $\displaystyle\lim_{x\to c} [f(x)]^2$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 31 y 32, considerar**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

a) **Completar la tabla para estimar el límite.**

b) **Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y usar la gráfica para estimar el límite.**

c) **Racionalizar el numerador y calcular de manera analítica el valor exacto del límite.**

x	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$				

31. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{3}}{x - 1}$

32. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

[*Sugerencia:* $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$]

Objeto en caída libre **En los ejercicios 33 y 34, utilizar la función posición $s(t) = -4.9t^2 + 250$, que da la altura en metros de un objeto que cae libremente desde una altura de 250 metros. Su velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

33. Calcular la velocidad cuando $t = 4$.

34. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

En los ejercicios 35 a 40, encontrar el límite (si lo hay). Si no existe límite, explicar por qué.

35. $\displaystyle \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$

36. $\displaystyle \lim_{x\to 4} [\![x-1]\!]$

37. $\displaystyle \lim_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x \le 2 \\ 2-x, & x > 2 \end{cases}$

38. $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} g(x)$, donde $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

39. $\displaystyle \lim_{t\to 1} h(t)$, donde $h(t) = \begin{cases} t^3+1, & t < 1 \\ \frac{1}{2}(t+1), & t \ge 1 \end{cases}$

40. $\displaystyle \lim_{s\to -2} f(s)$, donde $f(s) = \begin{cases} -s^2-4s-2, & s \le -2 \\ s^2+4s+6, & s > -2 \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 52, determinar los intervalos en los que la función es continua.

41. $f(x) = -3x^2 + 7$

42. $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$

43. $f(x) = [\![x+3]\!]$

44. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x-1}$

45. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \le 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

48. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

49. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

50. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+2}$

51. $f(x) = \csc \dfrac{\pi x}{2}$

52. $f(x) = \tan 2x$

53. Determinar el valor de c para el que la función es continua en toda la recta de los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 2 \\ cx+6, & x > 2 \end{cases}$$

54. Determinar los valores de b y c que hacen a la función continua sobre toda la recta de los números reales:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 < x < 3 \\ x^2+bx+c, & |x-2| \ge 1 \end{cases}$$

55. Utilizar el teorema de valor intermedio para demostrar que $f(x) = 2x^3 - 3$ tiene un cero en el intervalo $[1, 2]$.

56. ***Costo de mensajería*** El envío de un paquete por mensajería de Nueva York a Atlanta cuesta \$12.80 por la primera libra y \$2.50 por cada libra o fracción adicional. Utilizar la función parte entera para elaborar un modelo que describa el costo C de envío por mensajería para un paquete de x libras. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y analizar su continuidad.

57. Sea $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$. Encontrar los siguientes límites (si es posible).

a) $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} f(x)$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} f(x)$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 2} f(x)$

58. Sea $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$

a) Encontrar el dominio de f.

b) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

c) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

En los ejercicios 59 a 62, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

59. $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

60. $h(x) = \dfrac{4x}{4-x^2}$

61. $f(x) = \dfrac{8}{(x-10)^2}$

62. $f(x) = \csc \pi x$

En los ejercicios 63 a 74, encontrar el límite lateral (si existe).

63. $\displaystyle \lim_{x\to -2^-} \frac{2x^2+x+1}{x+2}$

64. $\displaystyle \lim_{x\to (1/2)^+} \frac{x}{2x-1}$

65. $\displaystyle \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x^3+1}$

66. $\displaystyle \lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x^4-1}$

67. $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

68. $\displaystyle \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2x+1}{x+1}$

69. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{x^3}\right)$

70. $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

71. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 4x}{5x}$

72. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\sec x}{x}$

73. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\csc 2x}{x}$

74. $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos^2 x}{x}$

75. ***Medio ambiente*** Una central térmica quema carbón para generar energía eléctrica. El costo C, en dólares, de eliminar p% de las sustancias contaminantes del aire en sus emisiones de humo es

$$C = \frac{80\,000p}{100-p}, \qquad 0 \le p < 100.$$

Calcular cuánto cuesta eliminar *a*) 15%, *b*) 50% y *c*) 90% de los contaminantes. *d*) Encontrar el límite de C cuando $p \to 100^-$.

76. La función f está definida como

$$f(x) = \frac{\tan 2x}{x}, \qquad x \ne 0$$

a) Encontrar $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$ (si existe).

b) ¿Puede definirse la función f en $x = 0$ de manera que sea continua en ese punto?

2.2 Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras cuál es el significado de la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla con esta proposición y que aún $f(2) = 3$ sea verdadero? Explique.

2. Explique qué significa decir que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación, ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

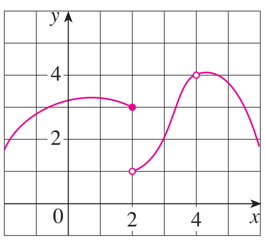
3. Explique el significado de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Utilice la gráfica de f para establecer el valor de cada cantidad si ésta existe. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

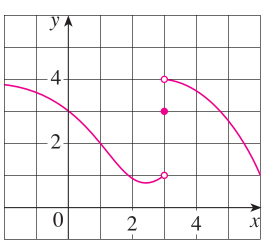
d) $f(2)$ e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ f) $f(4)$



5. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ e) $f(3)$



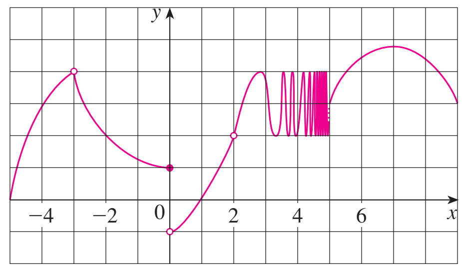
6. Para la función h cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

d) $h(-3)$ e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ h) $h(0)$ i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

j) $h(2)$ k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

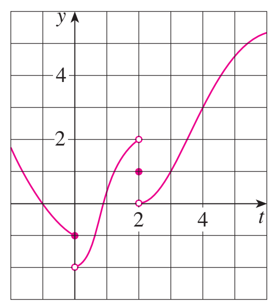


7. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades si existe. Si no, explique por qué.

a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

g) $g(2)$ h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

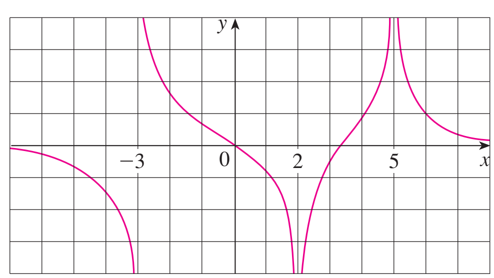


8. Para la función R cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x \to 2} R(x)$ b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$ d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



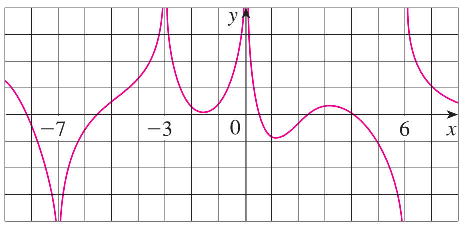
Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

9. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

a) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$

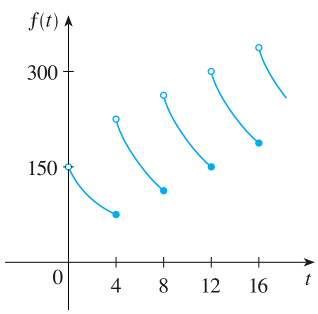
f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11-12 Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones y utilícela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

13-14 Utilice la gráfica de la función f para establecer el valor de cada uno de los siguientes límites, si es que existen. Si no, explique por qué.

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15-18 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

15. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2, \quad f(0) = 1$

16. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -2, \quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2,$
$f(0) = -1, \quad f(3) = 1$

17. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

18. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

19-22 Conjeture el valor de cada uno de los siguientes límites (si existen) evaluando la función dada en los números propuestos (con una precisión de seis decimales).

19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$
$x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001,$
$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

20. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$
$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999,$
$-2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

21. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}, \quad t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

22. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^5 - 32}{h},$
$h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

23-26 Utilice una tabla de valores para estimar el valor de cada uno de los siguientes límites. Si dispone usted de una calculadora o computadora, utilícela para confirmar gráficamente su resultado.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$ **24.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$ **26.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

27. a) Por medio de la grafica de la función $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y, estime el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

b) Verifique su respuesta del inciso a) mediante la evaluación de $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

28. a) Estime el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

graficando la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Exprese su respuesta con una precisión de dos decimales.

b) Verifique su respuesta del inciso a) evaluando $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

29-37 Determine cada uno de los siguientes límites infinitos.

29. $\lim_{x \to -3^+} \frac{x + 2}{x + 3}$

30. $\lim_{x \to -3^-} \frac{x + 2}{x + 3}$

31. $\lim_{x \to 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$

32. $\lim_{x \to 5^-} \frac{e^x}{(x - 5)^3}$

33. $\lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

34. $\lim_{x \to \pi^-} \cot x$

35. $\lim_{x \to 2\pi^-} x \csc x$

36. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

---

38. a) Encuentre las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

b) Verifique su respuesta al inciso a) graficando la función.

39. Determine $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^3 - 1}$

a) evaluando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que tiendan a 1, por el lado izquierdo y por el lado derecho.

b) razonando como en el ejemplo 9, y

c) a partir de la gráfica de f.

40. a) Por medio de la gráfica de la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y estime el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Verifique su respuesta del inciso a) para evaluar $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

41. a) Estime el valor de $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ con una precisión de cinco decimales. ¿Le parece conocido este número?

b) Ilustre el inciso a) graficando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

42. a) Grafique la función $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. ¿Piensa que la gráfica es una buena representación de f?

b) ¿Cómo conseguiría una gráfica que represente mejor a f?

43. a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1\,000)$ para $x = 1$, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1 y 0.05 e intuya el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1\,000} \right)$$

b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04$, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003 y 0.001. Intuya otra vez.

44. a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1$, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01 y 0.005.

b) Intuya el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

c) Evalúe $h(x)$ para sucesivos valores pequeños de x hasta que finalmente alcance un valor de 0 para $h(x)$. ¿Aún confía usted en que su conjetura en el inciso b) es correcta? Explique por qué finalmente obtuvo valores 0. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)

d) Grafique la función h en un rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Después haga un acercamiento hacia el punto donde la gráfica interseca el eje y, para estimar el límite de $h(x)$ cuando x tienda a 0. Continúe el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso c).

45. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después haga acercamientos al origen varias veces. Haga comentarios relacionados con el comportamiento de esta función.

46. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c^-$?

47. Utilice una gráfica para estimar la ecuación de todas las asíntotas verticales de la curva

$$y = \tan(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Después, encuentre las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

48. a) Utilice evidencias numéricas y gráficas para intuir el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

b) ¿Qué tan cerca a 1 debe estar x para asegurar que la función del inciso a) está dentro de una distancia de 0.5 de este límite?

Para hacer esto, utilizamos lo que sabemos de la función seno. Ya que el seno de cualquier número está entre -1 y 1, podemos afirmar que

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1 \tag{4}$$

Cualquier desigualdad permanece válida cuando la multiplicamos por un número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, así que multiplicando cada lado de la desigualdad en $\boxed{4}$ por x^2, obtenemos

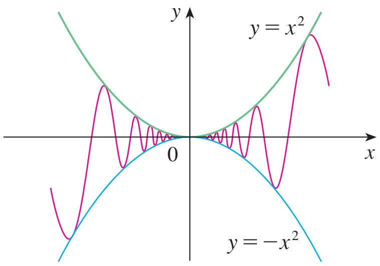


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como se ilustra en la figura 8. Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ del teorema de la compresión, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

2.3 Ejercicios

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

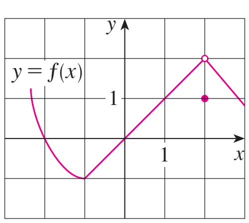
encuentre los límites que existen. Si el límite no existe, explique por qué.

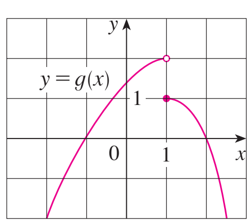
a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$ b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.





a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$ b) $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2}[x^3 f(x)]$ f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

3. $\lim_{x\to 3}(5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

4. $\lim_{x\to -1}(x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t\to -2}\dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t\to 2}\left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Considerando el inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 3)$$

es correcta.

11-32 Evalúe cada uno de los siguientes límites si éstos existen.

11. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

12. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

13. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

14. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim\limits_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim\limits_{u \to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

30. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

---

33. a) Estime el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

graficando la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e intuya el valor del límite.

c) Utilice las leyes de los límites para probar que su conjetura es correcta.

34. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ con dos decimales.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con cuatro decimales.

c) Utilice las leyes de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

35. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x \to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ graficando en la misma pantalla.

36. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\, \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

evidenciándolo con las gráficas de las funciones f, g y h (en la notación del teorema de la compresión), en la misma pantalla.

37. Si $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encuentre $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

38. Si $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para toda x, evalúe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

39. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encuentre cada uno de los siguientes límites si éstos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

41. $\lim\limits_{x \to 3} \left(2x + |x - 3|\right)$

42. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim\limits_{x \to 0.5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

46. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

---

47. La *función signo*, denotada por sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de esta función

b) Encuentre cada uno de los siguientes límites o explique por qué no existen.

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$ ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ iv) $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Encuentre $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

b) ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?

c) Trace la gráfica de f.

49. Sea $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

a) Encuentre

i) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} g(x)$?

c) Trace la gráfica de g.

50. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Evalúe cada una de los siguientes límites si es que existen.

i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ iii) $g(1)$

iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

b) Trace la gráfica de g.

51. a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función entero mayor definida en el ejemplo 10, evalúe:

i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ iii) $\lim_{x\to -2.4} [\![x]\!]$

b) Si n es un entero, evalúe

i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!], -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

a) Trace la gráfica de f.

b) Evalúe cada uno de los siguientes límites si existen.

i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$

iii) $\lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x)$ iv) $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x\to a} f(x)$ existe?

53. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, muestre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$.

54. En la teoría de la relatividad, la fórmula de Contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario el límite lateral por la izquierda?

55. Si p es una función polinomial, demuestre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

56. Si r es una función racional, utilice el ejercicio 55 para demostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ para todo número a en el dominio de r.

57. Si $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

58. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encuentre cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

59. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

60. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir, aunque no existan $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

61. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)]$ puede existir, aunque no existan $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

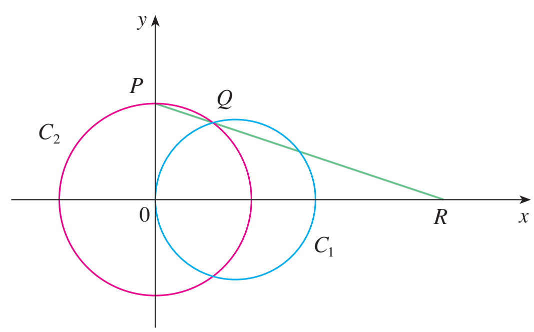
62. Evalúe $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

63. ¿Existe un número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

64. La figura muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 que se contrae con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de las dos circunferencias, y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje de las x. ¿Qué pasa con R cuando C_2 se contrae, esto es, cuando $r \to 0^+$?



2.4 La definición precisa de límite

La definición intuitiva de límite dada en la sección 2.2 es inadecuada para algunos propósitos porque frases como "x es muy cercano a 2" y "$f(x)$ se acerca más y más a L" son muy vagas. A fin de demostrar convincentemente que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0.0001 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

debemos precisar la definición de límite.

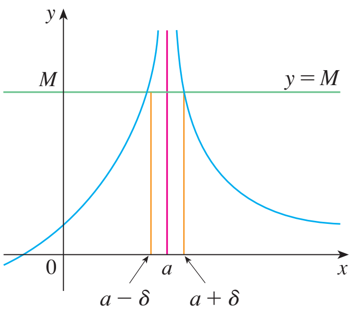


FIGURA 10

Esto dice que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (más grandes que cualquier número M dado), tomando x suficientemente cercano a a (dentro de una distancia δ, donde δ depende de M, pero con $x \neq a$). Una ilustración geométrica se muestra en la figura 10.

Dada cualquier recta horizontal $y = M$, podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos x al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, pero $x \neq a$, entonces la curva $y = f(x)$ está por debajo de la recta $y = M$. Usted puede ver que si se elige un valor muy grande de M, entonces se puede requerir un δ muy pequeño.

V EJEMPLO 5 Utilice la definición 6, para demostrar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

SOLUCIÓN Sea M un número positivo dado. Queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x| < \delta, \quad \text{entonces} \quad 1/x^2 > M$$

Pero

$$\frac{1}{x^2} > M \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{M} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Así que si elegimos $\delta = 1/\sqrt{M}$ y $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, entonces $1/x^2 > M$. Esto muestra que $1/x^2 \to \infty$ conforme $x \to 0$.

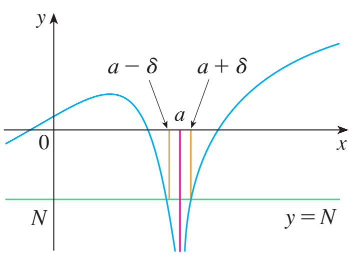


FIGURA 11

Del mismo modo, la siguiente es una versión precisa de la definición 5 de la sección 2.2. Esto se ilustra en la figura 11.

7 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

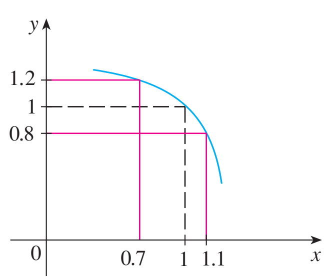
significa que para todo número negativo N existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

2.4 Ejercicios

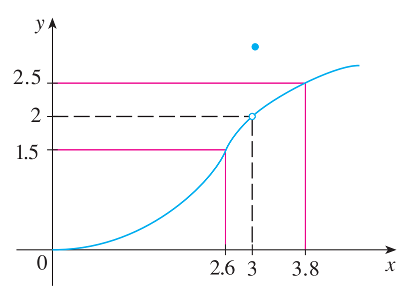
1. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad |x - 1| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 1| < 0.2$$



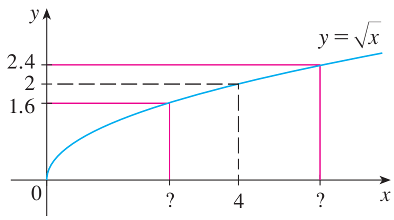
2. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 2| < 0.5$$



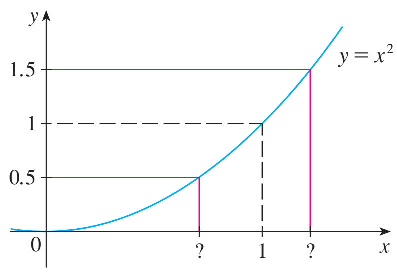
3. Utilice la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 4| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$$



4. Utilice la gráfica dada de $f(x) = x^2$ para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



5. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad \left| x - \frac{\pi}{4} \right| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\tan x - 1| < 0.2$$

6. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{2x}{x^2 + 4} - 0.4 \right| < 0.1$$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. Dado que $\lim_{x \to \pi/2} \tan^2 x = \infty$, ilustre la definición 6 para encontrar valores de δ que correspondan a a) $M = 1000$ y b) $M = 10\,000$.

10. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 5 < x < 5 + \delta, \quad \text{entonces} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm² de área.

a) ¿Qué radio produce tal disco?

b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm² en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso a) debe el tornero mantener el radio?

c) En términos de la definición ε-δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Un horno de confección de cristales, se utiliza en la investigación para determinar la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el idóneo, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.

a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200°C?

b) Si se permite una variación de temperatura de 200°C $\pm$1°C, ¿qué intervalo se potencia en watts se permite para la potencia de entrada?

c) De acuerdo con la definición ε-δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

13. a) Encuentre un número δ tal que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|4x - 8| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.

b) Repita el inciso a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Dado que $\lim_{x \to 2} (5x - 7) = 3$, ilustre la definición 2 encontrando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15-18 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε-δ de límite e ilústrelo con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim_{x \to 3} \left(1 + \frac{1}{3}x\right) = 2$

16. $\lim_{x \to 4} (2x - 5) = 3$

17. $\lim_{x \to -3} (1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x \to -2} (3x + 5) = -1$

19-32 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε-δ de límite.

19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x \to 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

21. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x \to -1.5} \dfrac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x \to a} x = a$

24. $\lim_{x \to a} c = c$

25. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x \to -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

31. $\lim_{x \to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que otra posible elección de δ para mostrar que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4 es $\delta = \text{mín}\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique con argumentos geométricos que la mayor posible elección de δ para demostrar que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SAC **35.** a) Para el límite $\lim_{x \to 1} (x^3 + x + 1) = 3$, utilice una gráfica para encontrar un valor de δ que corresponda a $\varepsilon = 0.4$.

b) Utilizando un sistema algebraico computarizado para resolver la ecuación cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, encuentre el mayor valor posible de δ que funciona para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

c) Ponga $\varepsilon = 0.4$ en su repuesta del inciso b) y compárelo con su respuesta del inciso a).

36. Demuestre que $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

37. Demuestre que $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$$\left[\textit{Sugerencia:} \text{ utilice } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \right]$$

38. Si H es la función de Heaviside definida en el ejemplo 6 en la sección 2.2, demuestre, utilizando la definición 2, que $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe. [*Sugerencia:* utilice una demostración indirecta como sigue. Suponga que el límite es L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de límite y trate de llegar a una contradicción.]

39. Si la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Demuestre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

40. Comparando las definiciones 2, 3 y 4, demuestre el teorema 1 de la sección 2.3.

41. ¿Qué tan cerca a -3 tiene que tomar x de manera que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000?$$

42. Demuestre, utilizando la definición 6, que $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponga que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

b) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \infty \quad \text{si} \quad c > 0$

c) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = -\infty \quad \text{si} \quad c < 0$

2.5 Continuidad

En la sección 2.3, hemos visto que el límite de una función cuando x tiende a a, con frecuencia se obtiene simplemente calculando el valor de la función en a. Las funciones con esta propiedad son llamadas *continuas en* $x = a$. Veremos que la definición matemática de continuidad coincide notoriamente con el sentido de *continuidad* que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.)

Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, entonces los puntos $(x, f(x))$ en la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica. Así que no existe ninguna brecha en la curva.

1 Definición Una función f es **continua en un número $x = a$** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

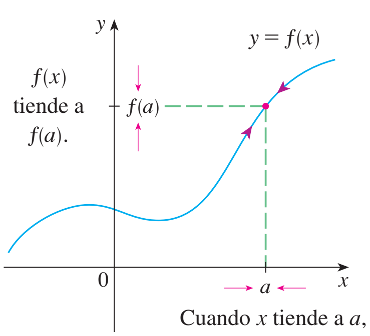


FIGURA 1

Note que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas. Si f es continua en a, entonces:

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La definición indica que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua f tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce sólo un

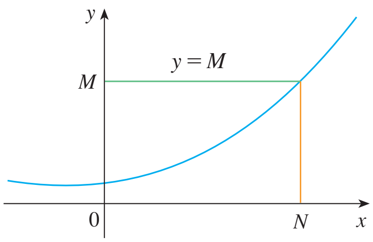


FIGURA 19
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Finalmente notamos que un límite infinito al infinito puede definirse como sigue. En la figura 19 se muestra una ilustración geométrica.

9 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \qquad \text{entonces} \qquad f(x) > M$$

Definiciones similares se aplican cuando el símbolo ∞ se reemplaza por $-\infty$. (Véase el ejercicio 74.)

2.6 Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. a) ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersecar una asíntota vertical? ¿Puede intersecar una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

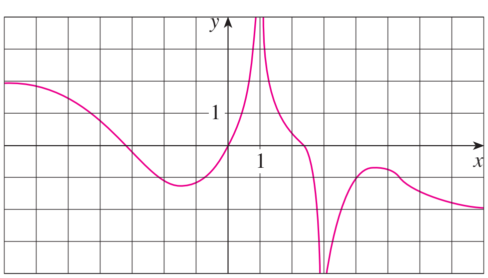
b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas que muestren las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas

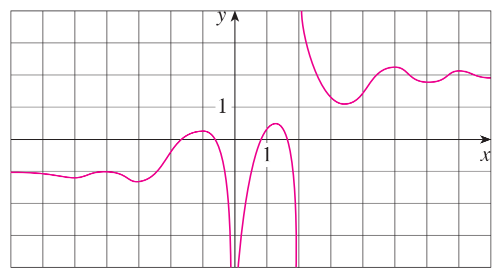


4. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ f) Las ecuaciones de las asíntotas



5-10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

7. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, f es impar

9. $f(0) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

11. Conjeture el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. Después, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con una aproximación de dos cifras decimales.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con una aproximación de cuatro cifras decimales.

13-14 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15-38 Encuentre el límite o demuestre que no existe.

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x - 2}{2x + 1}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$

18. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3 + 6x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 5}$

19. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33. $\lim_{x\to\infty} \arctan(e^x)$

34. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37. $\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

38. $\lim_{x\to0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

39. a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

dibujando la gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x.$$

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para conjeturar el valor del límite.

c) Pruebe que su conjetura es correcta.

40. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con una aproximación de una cifra decimal.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con una aproximación de cuatro cifras decimales.

c) Halle el valor exacto del límite.

41-46 Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

41. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

42. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

mediante la gráfica de f para $-10 \leq x \leq 10$. Después obtenga la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

48. a) Grafique la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Utilice la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

b) Calcule algunos valores de $f(x)$ y proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso a).

c) Calcule los valores exactos de los límites en el inciso a). ¿Obtiene el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites? [En relación con su respuesta al inciso a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite.]

49. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

50. Proponga una fórmula para una función que tiene asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

51. Una función f es un cociente de funciones cuadráticas y tiene una asíntota vertical $x = 4$ y una intersección de x en $x = 1$. Se sabe que f tiene una discontinuidad removible en $x = -1$ y $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$. Evalúe

a) $f(0)$ b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

52-56 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para esbozar la gráfica como en el ejemplo 12.

52. $y = 2x^3 - x^4$ **53.** $y = x^4 - x^6$

54. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

56. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

---

57. a) Utilice el teorema de la compresión para evaluar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

b) Grafique $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces cruza la gráfica la asíntota?

58. Por el *comportamiento al final* de una función entenderemos una descripción de lo que sucede con sus valores cuando $x \to \infty$ y a medida que $x \to -\infty$

a) Describa y compare el comportamiento al final de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

graficando las dos funciones en los rectángulos de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10000, 10000]$.

b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento al final* si su cociente tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento al final.

59. Sean P y Q dos polinomios. Encuentre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es a) menor que el grado de Q y b) mayor que el grado de Q.

60. Haga un esbozo aproximado de la gráfica de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

i) $n = 0$ ii) $n > 0$, n impar
iii) $n > 0$, n par iv) $n < 0$, n impar
v) $n < 0$, n par

Después utilice estos esbozos para encontrar los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$

c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

61. Determine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

62. a) Un depósito contiene 5000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito con una proporción de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $x \to \infty$?

63. En el capítulo 9 se demostrará que, según ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad final* de la gota de lluvia.

a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

b) Trace la grafica de $v(t)$ si $v^* = 1\,\text{m/s}$ y $g = 9.8\,\text{m/s}^2$. ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance 99% de su velocidad final?

64. a) Mediante el trazo de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.

b) ¿Puede resolver el inciso a) sin un dispositivo de graficación?

65. Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

66. En el caso del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

67. Ilustre la definición 8 para el límite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

determinando valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

68. Ilustre la definición 9 para el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

calculando valores de N que correspondan a $M = 100$.

una raíz debe estar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por ensayo y error,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

así que la raíz está en el intervalo (1.22, 1.23)

Podemos utilizar una calculadora graficadora o computadora para ilustrar el uso del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. La figura 10 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, y puede usted ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. La figura 11 muestra el resultado de un acercamiento en un rectángulo de vista $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

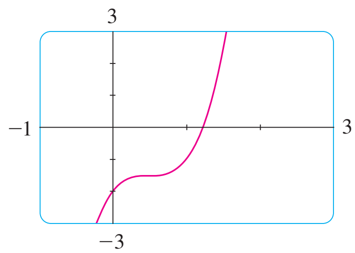


FIGURA 10

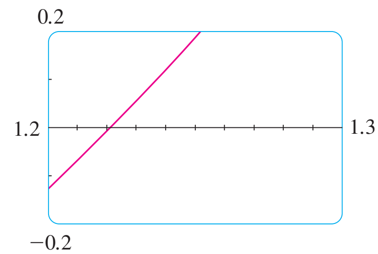


FIGURA 11

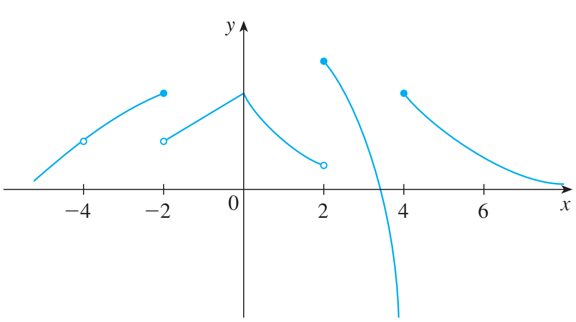
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un importante papel en el modo en que funcionan estos dispositivos de graficación. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y activa los píxeles que contienen estos puntos calculados. Se supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. La computadora une los píxeles activando aquellos intermedios.

2.5 Ejercicios

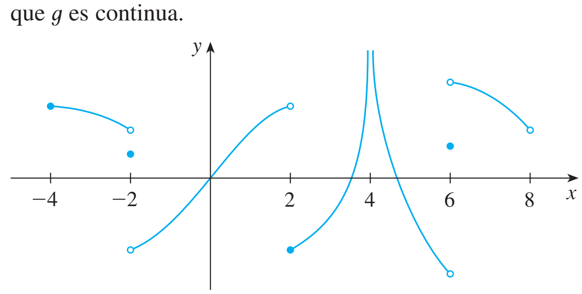
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su grafica?

3. a) A partir de la grafica de f, establezca el número en el cual f es discontinua y explique por qué.
b) Para cada uno de los números que se obtuvieron en el inciso a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



4. A partir de la grafica de g, establezca los intervalos sobre los que g es continua.



5-8 Dibuje la gráfica de una función f que es continua, a excepción de la discontinuidad señalada.

5. Discontinua, pero continua por la derecha, en $x = 2$.

6. Discontinuidades en $x = -1$ y $x = 4$, pero continuas por la izquierda en $x = -1$ y por la derecha en $x = 4$.

7. Discontinuidad removible en $x = 3$, discontinuidad de salto en $x = 5$.

8. Ni por la izquierda ni por la derecha es continua en $x = -2$, continua sólo por la izquierda en $x = 2$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

9. El peaje T que se cobra por conducir en un determinado tramo de una carretera es de \$5, excepto durante las horas pico (entre las 7 y las 10 y entre las 16 y 19 horas) cuando el peaje es de \$7.

a) Esboce una gráfica de T como una función del tiempo t, medido en horas pasada la medianoche.

b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que utiliza la carretera.

10. Explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua o discontinua.

a) La temperatura en una localidad específica como una función del tiempo

b) La temperatura en un momento determinado como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York

c) La altitud sobre el nivel del mar como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York

d) El costo de transportarse en taxi como una función de la distancia de traslado

e) La corriente en un circuito de iluminación en una habitación como una función del tiempo

11. Si f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x\to 2}[3f(x) + f(x)g(x)] = 36$, encuentre $f(2)$.

12-14 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los limites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua en el número dado $x = a$.

12. $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}, \quad a = 2$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

15-16 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua sobre el intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

17-22 Explique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado $x = a$. Dibuje la gráfica de la función.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

23-24 ¿Cómo podría "remover la discontinuidad" en cada una de las siguientes funciones? En otras palabras, ¿cómo redefiniría $f(2)$ a fin de que sean continuas en $x = 2$?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25-32 Utilizando los teoremas 4, 5, 7 y 9, explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo número de su dominio. Determine el dominio.

25. $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$

26. $G(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

27. $Q(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x - 2}}{x^3 - 2}$

28. $R(t) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} t}}{2 + \cos \pi t}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$

30. $B(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

32. $N(r) = \tan^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33-34 Identifique las discontinuidades de cada una de las siguientes funciones e ilústrelas con una gráfica.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

34. $y = \ln(\tan^2 x)$

35-38 Utilice la continuidad para evaluar cada uno de los siguientes límites.

35. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

36. $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2 - x}$

38. $\lim\limits_{x\to 2} \arctan\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

39-40 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

41-43 Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

---

44. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G la constante gravitacional. ¿Es F una función continua de r?

45. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

46. Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para toda x.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

47. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en $x = a$? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en $x = a$.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

48. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25 y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos posibles graficas de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

49. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 1000$.

50. Suponga que f es continua sobre $[1, 5]$ y las únicas soluciones de la ecuación $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique por qué $f(3) > 6$.

51-54 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz en cada una de las ecuaciones dadas en el intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

52. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$

54. $\operatorname{sen} x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

55-56 a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.

b) Utilice su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

55. $\cos x = x^3$

56. $\ln x = 3 - 2x$

57-58 a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.

b) Utilice un dispositivo de graficación para encontrar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

57. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

58. $\arctan x = 1 - x$

---

59. Demuestre que f es continua en a *si* y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

60. Para demostrar que la función seno es continua necesita demostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real $x = a$. Según el ejercicio 59, una proposición equivalente es que

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Aplique $\boxed{6}$ para demostrar que esto es cierto.

61. Demuestre que la función coseno es continua.

62. a) Demuestre el teorema 4, inciso 3.

b) Demuestre el teorema 4, inciso 5.

63. ¿Para qué valores de x es f continua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

64. ¿Para qué valores de x es g continua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

65. ¿Existe un número que es exactamente 1 más que su cubo?

66. Si a y b son números positivos, demuestre que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

67. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre $(-\infty, \infty)$

68. a) Demuestre que la función valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua para toda x.

b) Demuestre que si f es una función continua sobre un intervalo, entonces también lo es $|f|$.

c) ¿Lo inverso de la proposición del inciso b) también es verdadero? En otras palabras, si $|f|$ es continua, ¿se deduce que f es continua? De ser así, demuéstrelo. En caso de no ser así, halle un contraejemplo.

69. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 y emprende su camino habitual hacia la cima de la montaña, adonde llega a las 19:00. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 y llega al monasterio a las 19:00. Mediante el teorema del valor intermedio demuestre que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

2.6 Límites al infinito, asíntotas horizontales

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí aproximamos x a un número y vimos que los valores de y se vuelven arbitrariamente grandes (ya sean positivos o negativos). En esta sección haremos x arbitrariamente grande en magnitud y observaremos qué ocurre con y.

Empecemos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a medida que x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función con una aproximación de seis decimales, y en la figura 1 se ha trazado la gráfica de f por medio de la computadora.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
$\pm 1\,000$	0.999998

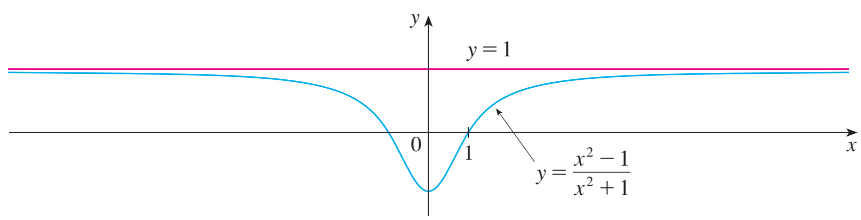


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, puede verse que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, utilizamos la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

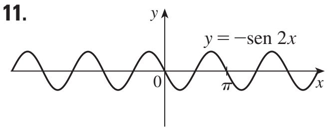
1 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

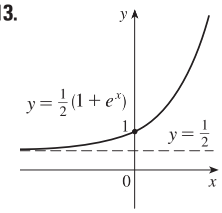
significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.

9. a) Traslade la gráfica 8 unidades hacia arriba.
b) Traslade la gráfica 8 unidades a la izquierda.
c) Estire la gráfica verticalmente en un factor de 2, luego trasládela 1 unidad hacia arriba.
d) Traslade la gráfica 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.
e) Refleje la gráfica alrededor del eje x.
f) Refleje la gráfica alrededor de la recta $y = x$ (suponiendo que f es uno a uno).

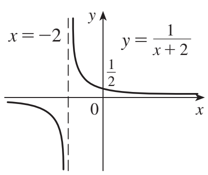
11.



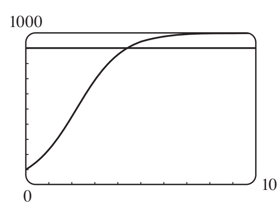
13.



15.



17. a) Ninguna b) Impar c) Par d) Ninguna
19. a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$
c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$
d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$
21. $y = 0.2493x - 423.4818$; alrededor de 77.6 años
23. 1 **25.** a) 9 b) 2 c) $1/\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{5}$
27. a)

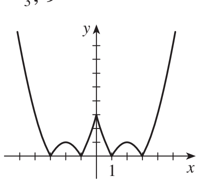


≈ 4.4 años

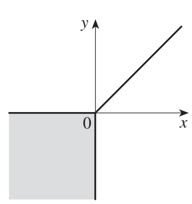
b) $t = -\ln\left(\dfrac{1000 - P}{9P}\right)$; el tiempo requerido para la población alcance un número P.
c) $\ln 81 \approx 4.4$ años

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 80

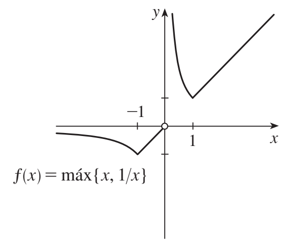
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, donde a es la longitud de la altura y h es la longitud de la hipotenusa
3. $-\frac{7}{3}$, 9
5.



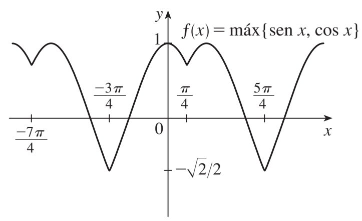
7.



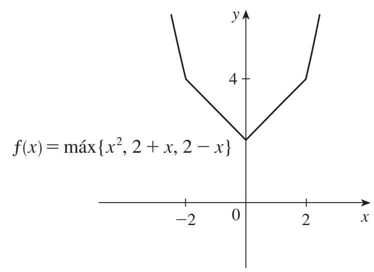
9. a)



b)



c)



11. 5 **13.** $x \in \left[-1, 1 - \sqrt{3}\right) \cup \left(1 + \sqrt{3}, 3\right]$
15. 40 mi/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

CAPÍTULO 2

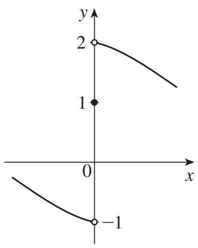
EJERCICIOS 2.1 ■ PÁGINA 86

1. a) $-44.4, -38.8, -27.8, -22.2, -16.\overline{6}$
b) -33.3 c) $-33\frac{1}{3}$
3. a)i) 2 ii) 1.111111 iii) 1.010101 iv) 1.001001
v) 0.666667 vi) 0.909091 vii) 0.990099
viii) 0.999001 b) 1 c) $y = x - 3$
5. a) i) -32 pies/s ii) -25.6 pies/s iii) -24.8 pies/s
iv) -24.16 pies/s b) -24 pies/s
7. a) i) 4.65 m/s ii) 5.6 m/s iii) 7.55 m/s
iv) 7 m/s b) 6.3 m/s
9. a) 0, 1.7321, -1.0847, -2.7433, 4.3301, -2.8173, 0, -2.1651, -2.6061, -5, 3.4202; no c) -31.4

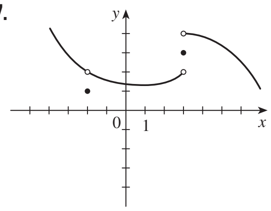
EJERCICIOS 2.2 ■ PÁGINA 96

1. Sí
3. a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tanto como se desee) al tomar x suficientemente cerca de -3 (pero no igual a -3).

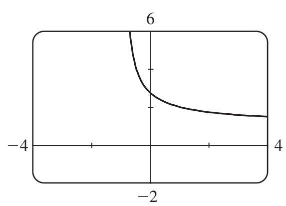
b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer negativos arbitrariamente grandes al tomar x suficientemente cerca de 4 hasta valores mayores a 4.
5. a) 2 b) 1 c) 4 d) No existe e) 3
7. a) -1 b) -2 c) No existe d) 2 e) 0
f) No existe g) 1 h) 3
9. a) $-\infty$ b) ∞ c) ∞ d) $-\infty$ e) ∞
f) $x = -7, x = -3, x = 0, x = 6$
11. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe para toda a excepto para $a = -1$.
13. a) 1 b) 0 c) No existe.
15.



17.



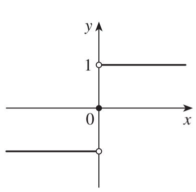
9. $\frac{2}{3}$ **21.** 5 **23.** $\frac{1}{4}$ **25.** $\frac{3}{5}$ **27.** a) -1.5
29. $-\infty$ **31.** ∞ **33.** $-\infty$ **35.** $-\infty$ **37.** ∞
39. $-\infty$; ∞
41. a) 2.71828 b)



43. a) 0.998000, 0.638259, 0.358484, 0.158680, 0.038851, 0.008928, 0.001465; 0
b) 0.000572, -0.000614, -0.000907, -0.000978, -0.000993, -0.001000; -0.001
45. No importa las veces que haga acercamientos hacia el origen, parece que la gráfica está formada por rectas casi verticales. Esto indica oscilaciones cada vez más frecuentes cuando $x \to 0$.
47. $x \approx \pm 0.90, \pm 2.24$; $x = \pm\text{sen}^{-1}(\pi/4), \pm(\pi - \text{sen}^{-1}(\pi/4))$

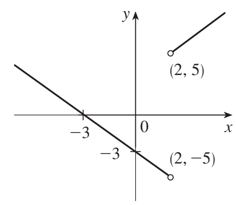
EJERCICIOS 2.3 ■ PÁGINA 106

1. a) -6 b) -8 c) 2 d) -6
e) No existe f) 0
3. 105 **5.** $\frac{7}{8}$ **7.** 390 **9.** $\frac{3}{2}$ **11.** 4
13. No existe **15.** $\frac{6}{5}$ **17.** -10 **19.** $\frac{1}{12}$
21. $\frac{1}{6}$ **23.** $-\frac{1}{16}$ **25.** 1 **27.** $\frac{1}{128}$ **29.** $-\frac{1}{2}$
31. $3x^2$ **33.** a), b) $\frac{2}{3}$ **37.** 7 **41.** 6 **43.** -4
45. No existe
47. a)



b) i) 1
ii) -1
iii) No existe
iv) 1

49. a) i) 5 ii) -5 b) No existe
c)



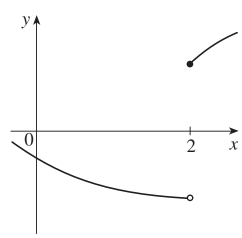
51. a) i) -2 ii) No existe iii) -3
b) i) $n - 1$ ii) n c) a no es un entero
57. 8 **63.** 15; -1

EJERCICIOS 2.4 ■ PÁGINA 116

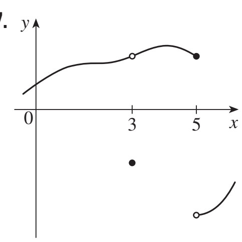
1. 0.1 (o cualquier número positivo más pequeño)
3. 1.44 (o cualquier número positivo más pequeño)
5. 0.0906 (o cualquier número positivo más pequeño)
7. 0.011 (o cualquier número positivo más pequeño)
9. a) 0.031 b) 0.010
11. a) $\sqrt{1000/\pi}$ cm b) Aproximadamente 0.0445
c) Radio, área $\sqrt{1000/\pi}$; 1000; 5; ≈ 0.0445
13. a) 0.025 b) 0.0025
35. a) 0.093 b) $\delta = (B^{2/3} - 12)/(6B^{1/3}) - 1$, donde $B = 216 + 108\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\varepsilon + 81\varepsilon^2}$
41. Menos de 0.1.

EJERCICIOS 2.5 ■ PÁGINA 127

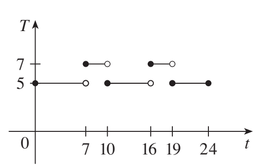
1. $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$
3. a) $f(-4)$ no está definida y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ [para $a = -2$, 2, y 4] no existe
b) -4, ninguno; -2, izquierda; 2, derecha; 4, derecha
5.



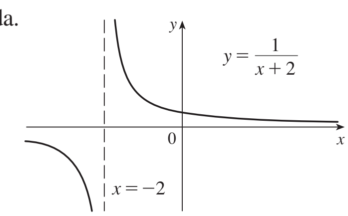
7.



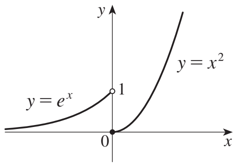
9. a)



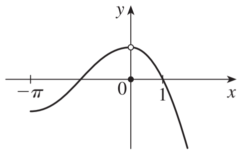
11. 4 **17.** $f(-2)$ está indefinida.



19. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.



21. $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

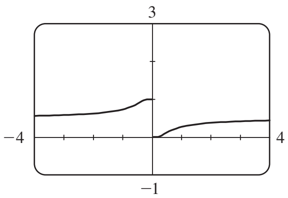


23. Define $f(2) = 3$. **25.** $(-\infty, \infty)$

27. $(-\infty, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty)$ **29.** $[-1, 0]$

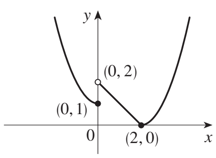
31. $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

33. $x = 0$

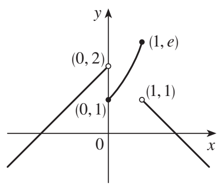


35. $\frac{7}{3}$ **37.** 1

41. 0, izquierda



43. 0, derecha; 1, izquierda



45. $\frac{2}{3}$ **47.** a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ b) $g(x) = x^2 + x$

55. b) (0.86, 0.87) **57.** b) 70.347 **63.** Ninguna

65. Sí

EJERCICIOS 2.6 ■ PÁGINA 140

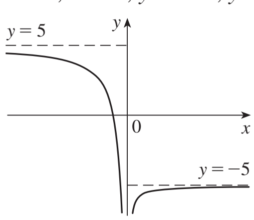
1. a) Cuando x es muy grande, $f(x)$ tiende a 5.

b) Cuando x es muy negativa, $f(x)$ tiende a 3.

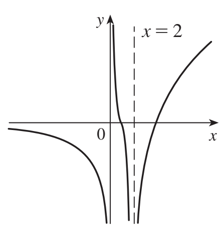
3. a) -2 b) 2 c) ∞ d) $-\infty$

e) $x = 1, x = 3, y = -2, y = 2$

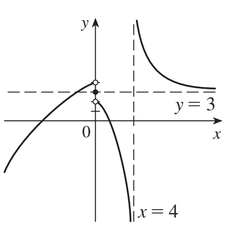
5.



7.



9.



11. 0 **13.** $\frac{3}{2}$ **15.** $\frac{3}{2}$ **17.** 0 **19.** -1 **21.** 4

23. 3 **25.** $\frac{1}{6}$ **27.** $\frac{1}{2}(a - b)$ **29.** ∞

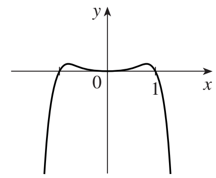
31. $-\infty$ **33.** $\pi/2$ **35.** $-\frac{1}{2}$ **37.** 0

39. a), b) $-\frac{1}{2}$ **41.** $y = 2; x = 2$

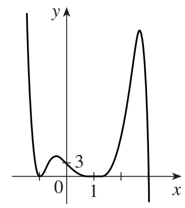
43. $y = 2; x = -2, x = 1$ **45.** $x = 5$ **47.** $y = 3$

49. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2(x - 3)}$ **51.** a) $\frac{5}{4}$ b) 5

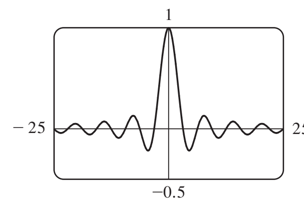
53. $-\infty, -\infty$



55. $-\infty, \infty$

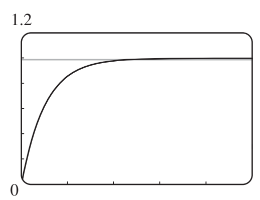


57. a) 0 b) Un infinito de veces



59. a) 0 b) $\pm\infty$ **61.** 5

63. a) v^* b)



≈ 0.47 s

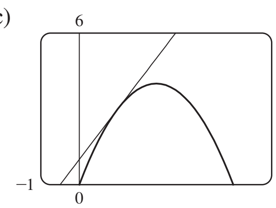
65. $N \geqslant 15$ **67.** $N \leqslant -6, N \leqslant -22$

69. a) $x > 100$

EJERCICIOS 2.7 ■ PÁGINA 150

1. a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

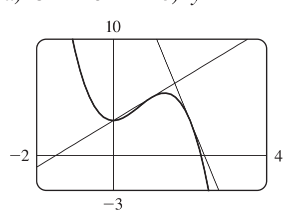
3. a) 2 b) $y = 2x + 1$ c)



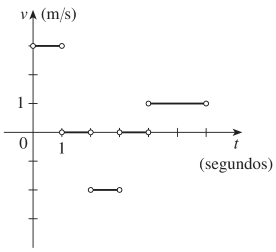
5. $y = -8x + 12$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

9. a) $8a - 6a^2$ b) $y = 2x + 3, y = -8x + 19$

c)



11. a) derecha: $0 < t < 1$ y $4 < t < 6$; izquierda: $2 < t < 3$; de pie; $1 < t < 2$ y $3 < t < 4$

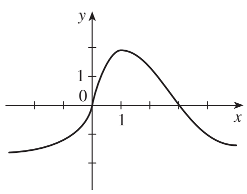
b) 

13. -24 pies/s

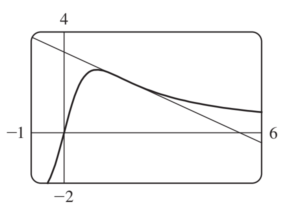
15. $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

17. $g'(0)$, 0, $g'(4)$, $g'(2)$, $g'(-2)$

19. $f(2) = 3$; $f'(2) = 4$

21. 

23. $y = 3x - 1$

25. a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ b) 

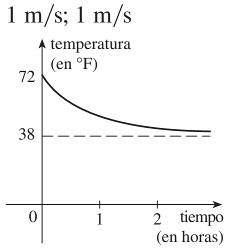
27. $6a - 4$ **29.** $\dfrac{5}{(a+3)^2}$ **31.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-2a}}$

33. $f(x) = x^{10}$, $a = 1$ o $f(x) = (1 + x)^{10}$, $a = 0$

35. $f(x) = 2^x$, $a = 5$

37. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$ o $f(x) = \cos(\pi + x)$, $a = 0$

39. 1 m/s; 1 m/s

41. 

mayor en magnitud

43. a) i) 23 millones/año ii) 20.5 millones/año iii) 16 millones/año

b) 18.25 millones/año c) 17 millones/año

45. a) i) \$20.25/unidad ii) \$20.05/unidad b) \$20/unidad

47. a) La tasa a la que está cambiando el costo por onza de oro producido; dólares por onza

b) cuando se producen 800 onzas de oro, el costo de producción es de \$17/oz

c) disminución a corto plazo; aumentar a largo plazo

49. La razón a la que está cambiando la temperatura a las 8:00 a.m.; 3.75 °F/h

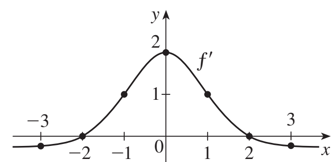
51. a) la razón a la que la solubilidad del oxígeno cambia con respecto a la temperatura del agua; (mg/L)/°C

b) $S'(16) \approx -0.25$; a medida que la temperatura aumenta pasado 16°C, la solubilidad del oxígeno está disminuyendo a razón de 0.25(mg/L)/°C.

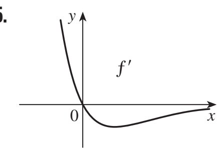
53. No existe

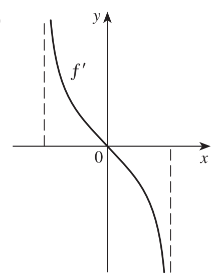
EJERCICIOS 2.8 ■ PÁGINA 162

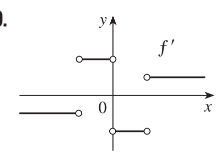
1. a) -0.2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 1 f) 0 g) -0.2

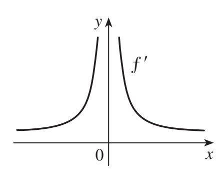


3. a) II b) IV c) I d) III

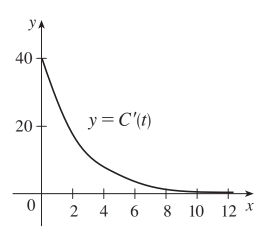
5. 

7. 

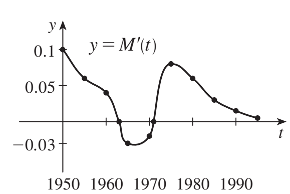
9. 

11. 

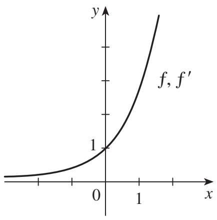
13. a) La razón instantánea de cambio de porcentaje de capacidad total respecto al tiempo transcurrido en horas.

b) 

La razón de cambio de porcentaje de plena capacidad está disminuyendo y acercándose a 0.

15. 

1963 a 1971

17. 

$f'(x) = e^x$

19. a) 0, 1, 2, 4 b) $-1, -2, -4$ c) $f'(x) = 2x$

21. $f'(x) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **23.** $f'(t) = 5 - 18t$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

25. $f'(x) = 2x - 6x^2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

27. $g'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{9 - x}}$, $(-\infty, 9]$, $(-\infty, 9)$

29. $G'(t) = \dfrac{-7}{(3 + t)^2}$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

31. $f'(x) = 4x^3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **33.** a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

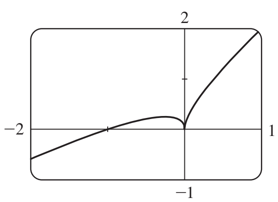
35. a) La razón a la que está cambiando la tasa de desempleo, en porcentaje de desempleados por año

b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1999	-0.2	2004	-0.45
2000	0.25	2005	-0.45
2001	0.9	2006	-0.25
2002	0.65	2007	0.6
2003	-0.15	2008	1.2

37. -4 (esquina); 0 (discontinuidad)

39. -1 (tangente vertical); 4 (esquina)

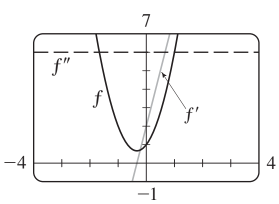
41. 

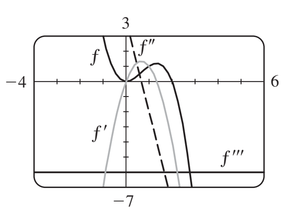
Derivable en -1; no derivable en 0

43. $a = f$, $b = f'$, $c = f''$

45. a = aceleración; b = velocidad; c = posición

47. $6x + 2$; 6



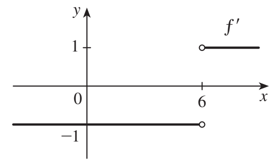
49. 

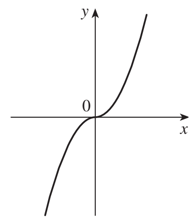
$f'(x) = 4x - 3x^2$,
$f''(x) = 4 - 6x$,
$f'''(x) = -6$,
$f^{(4)}(x) = 0$

51. a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

53. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

o $f'(x) = \dfrac{x - 6}{|x - 6|}$



55. a) 

b) toda x;
c) $f'(x) = 2|x|$

59. 63°

REPASO DEL CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 166

Examen rápido Verdadero-Falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Verdadero
19. Falso **21.** Falso **23.** Verdadero

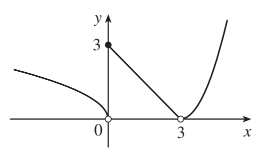
Ejercicios

1. a) i) 3 ii) 0 iii) No existe iv) 2
v) ∞ vi) $-\infty$ vii) 4 viii) -1
b) $y = 4$, $y = -1$ c) $x = 0$, $x = 2$ d) $-3, 0, 2, 4$

3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $\frac{4}{7}$ **13.** $\frac{1}{2}$

15. $-\infty$ **17.** 2 **19.** $\pi/2$ **21.** $x = 0$, $y = 0$ **23.** 1

29. a) i) 3 ii) 0 iii) No existe iv) 0 v) 0 vi) 0
b) En 0 y 3 c)

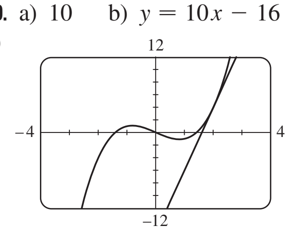


31. $\mathbb{R}$

35. a) -8 b) $y = -8x + 17$

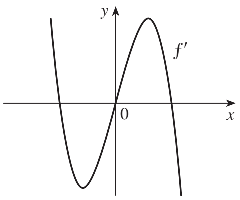
37. a) i) 3 m/s ii) 2.75 m/s iii) 2.625 m/s
iv) 2.525 m/s b) 2.5 m/s

39. a) 10 b) $y = 10x - 16$
c)

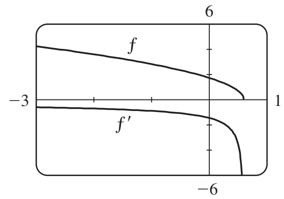


41. a) la tasa a la que el costo cambia respecto a la tasa de interés; dólares/(porcentaje por año)
b) a medida que aumenta la tasa de interés pasado 10%, el costo aumenta a una tasa de \$1200/(porcentaje por año)
c) Siempre positivo.

43.



45. a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3 - 5x)^{-1/2}$ b) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right], \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$
c)



47. -4(discontinuidad), -1 (esquina), 2 (discontinuidad). 5 (tangente vertical).
49. la tasa a la que está cambiando el valor total de la de E.U. moneda en circulación en miles de millones de dólares por año; \$22.2 miles de millones/año
51. 0

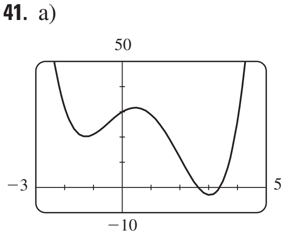
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 170

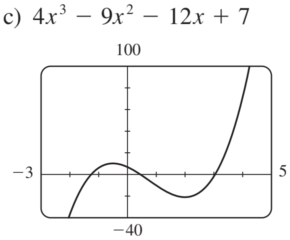
1. $\frac{2}{3}$ **3.** -4 **5.** a) no existe b) 1
7. $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ **9.** $\frac{3}{4}$ **11.** b) Sí c) Sí, no
13. a) 0 b) 1 c) $f'(x) = x^2 + 1$

CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1 ■ PÁGINA 181

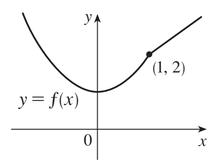
1. a) Ver definición del número e (pág. 180)
b) 0.99, 1.03; $2.7 < e < 2.8$
3. $f'(x) = 0$ **5.** $f'(t) = -\frac{2}{3}$ **7.** $f'(x) = 3x^2 - 4$
9. $g'(x) = 2x - 6x^2$ **11.** $g'(t) = -\frac{3}{2}t^{-7/4}$ **13.** $A'(s) = 60/s^6$
15. $R'(a) = 18a + 6$ **17.** $S'(p) = \frac{1}{2}p^{-1/2} - 1$
19. $y' = 3e^x - \frac{4}{3}x^{-4/3}$ **21.** $h'(u) = 3Au^2 + 2Bu + C$
23. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$ **25.** $j'(x) = 2.4x^{1.4}$
27. $H'(x) = 3x^2 + 3 - 3x^{-2} - 3x^{-4}$
29. $u' = \frac{1}{5}t^{-4/5} + 10t^{3/2}$
31. $z' = -10A/y^{11} + Be^y$ **33.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
35. Tangente: $y = 2x + 2$; normal: $y = -\frac{1}{2}x + 2$
37. $y = 3x - 1$ **39.** $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$
41. a) c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$

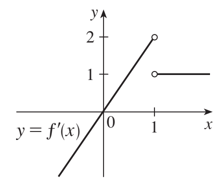




43. $f'(x) = 100x^9 + 25x^4 - 1$; $f''(x) = 900x^8 + 100x^3$
45. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}$, $f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

47. a) $v(t) = 3t^2 - 3$, $a(t) = 6t$ b) 12 m/s^2
c) $a(1) = 6 \text{ m/s}^2$
49. a) $V = 5.3/P$
b) -0.00212; razón de cambio instantánea del volumen con respecto a la presión a 25 °C; m^3/kPa
51. $(-2, 21)$, $(1, -6)$
55. $y = 12x - 15$, $y = 12x + 17$ **57.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
59. $(\pm 2, 4)$ **63.** $P(x) = x^2 - x + 3$ **65.** $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$
67. No

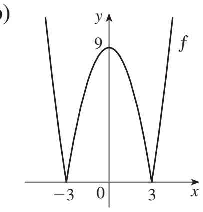


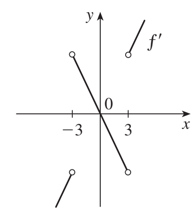


69. a) No derivable en 3 0 -3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } |x| < 3 \end{cases}$$

b)





71. $y = 2x^2 - x$ **73.** $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$ **75.** $m = 4$, $b = -4$
77. 1000 **79.** 3; 1

EJERCICIOS 3.2 ■ PÁGINA 189

1. $1 - 2x + 6x^2 - 8x^3$ **3.** $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$
5. $y' = \dfrac{1 - x}{e^x}$ **7.** $g'(x) = \dfrac{10}{(3 - 4x)^2}$ **9.** $H'(u) = 2u - 1$
11. $F'(y) = 5 + \dfrac{14}{y^2} + \dfrac{9}{y^4}$
13. $y' = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$ **15.** $y' = \dfrac{2t(-t^4 - 4t^2 + 7)}{(t^4 - 3t^2 + 1)^2}$
17. $y' = e^p\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{p} + p + p\sqrt{p}\right)$ **19.** $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$
21. $f'(t) = \dfrac{4 + t^{1/2}}{(2 + \sqrt{t})^2}$ **23.** $f'(x) = \dfrac{-ACe^x}{(B + Ce^x)^2}$
25. $f'(x) = \dfrac{2cx}{(x^2 + c)^2}$
27. $(x^4 + 4x^3)e^x$; $(x^4 + 8x^3 + 12x^2)e^x$
29. $\dfrac{2x^2 + 2x}{(1 + 2x)^2}$; $\dfrac{2}{(1 + 2x)^3}$ **31.** $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
33. $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$
35. a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b)