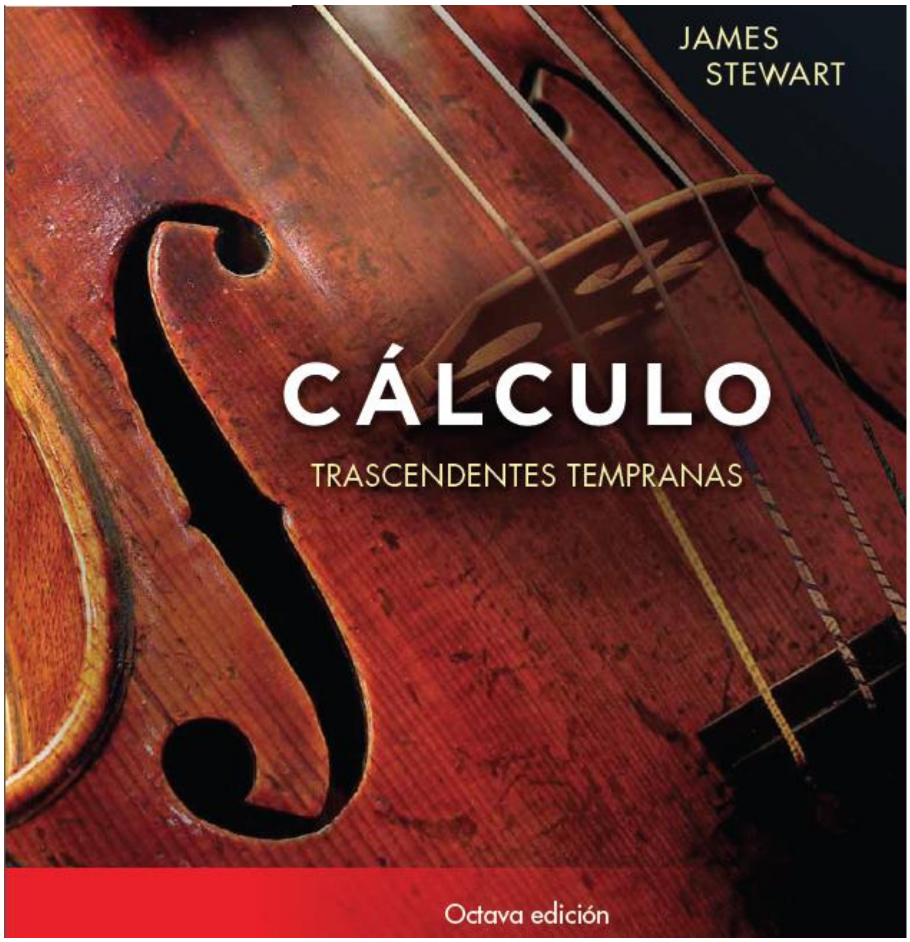
	Universidad Nacional Experimental del Táchira Departamento de Matemática y Física Matemática I – 0826101 Coordinación de Matemática I



DERIVADAS – TERCER PARCIAL – 25%

1. Interpretación geométrica de la derivada.
2. Cálculo de la derivada a partir de la definición (regla de los 4 pasos).
3. Continuidad y diferenciabilidad.
4. Reglas básicas de derivación.
5. Regla de la cadena.
6. Derivadas trigonométricas.
7. Derivadas de funciones trigonométricas inversas.
8. Derivación implícita.
9. Derivadas logarítmicas.

10. Derivación logarítmica.
11. Teorema de Rolle.
12. Teorema de LaGrange.
13. Regla de L´Hópital.

2.7 Derivadas y razones de cambio

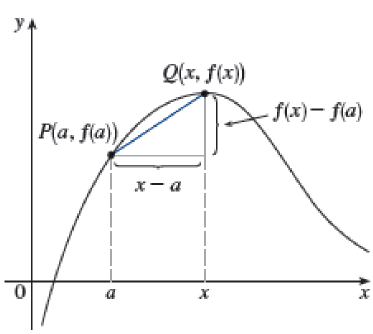
El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto implican encontrar el mismo tipo de límite, como se vio en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y se puede interpretar como una razón de cambio en las ciencias naturales o sociales y en ingeniería.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y uno quiere encontrar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Luego, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces se define la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m.



(Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 1.)

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, de acuerdo con la ecuación 2, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica a $$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente. ■

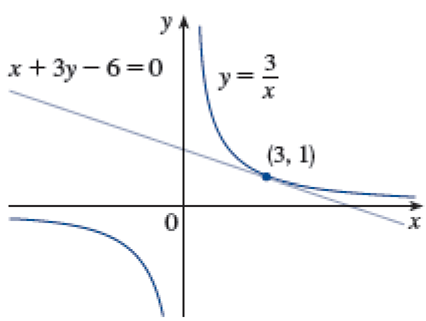


FIGURA 4

Velocidades

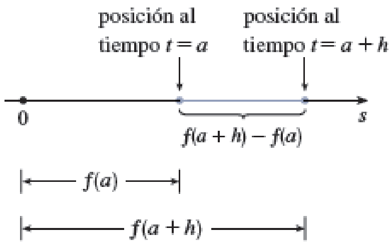


FIGURA 5

En la sección 2.1 se investigó el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN, y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre períodos de tiempo cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ a $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.)

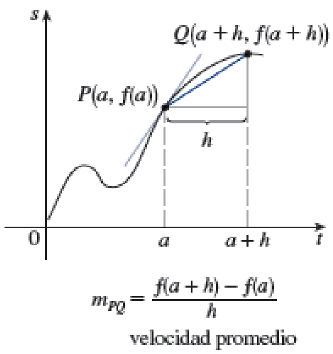


FIGURA 6

La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a - h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3
$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P (compare las ecuaciones 2 y 3).

Ahora que sabe calcular límites, considere nuevamente el problema de la pelota que cae.

EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
(b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

SOLUCIÓN Se necesita encontrar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente determinar la velocidad en un tiempo general t. Usando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t + h)^2 - 4.9t^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2 - t^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2th + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4.9h(2t+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 4.9(2t+h) = 9.8t$$

(a) La velocidad después de 5 segundos es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t, cuando $s(t) = 450$; es decir,

$$4.9t^2 = 450$$

Esto da

$$t^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

$f'(a)$ se lee "f prima de a".

4 Definición La **derivada de una función f en un número a**, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y solo si x tiende a a. Por consiguiente, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como se vio en la búsqueda de rectas tangentes, es

5
$$\boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

EJEMPLO 4

Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

Las definiciones 4 y 5 son equivalentes, así que se puede usar cualquiera de los dos para calcular la derivada. En la práctica, la definición 4 conduce a menudo a cálculos más simples.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8)$$

$$= 2a - 8$$

Se define la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, esta es la misma que la derivada $f'(a)$, se puede decir lo siguiente.

> La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si utiliza la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se puede escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

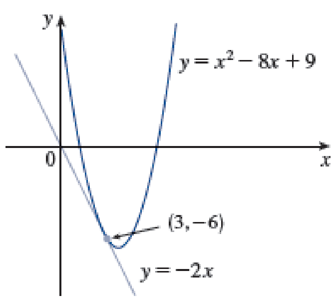


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 se sabe que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Por lo que la ecuación de la recta tangente, que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o} \qquad y = -2x$$

■

2.7 EJERCICIOS

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.

(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.

(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Trace la curva $y = e^x$ en los rectángulos de vista $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué nota acerca de la curva cuando hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$

(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).

(c) Trace la gráfica de la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$

(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).

(c) Trace la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

---

9. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x + 3$ en el punto donde $x = a$.

(b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.

(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

27. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto $(1, 2)$.

28. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

29. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto $(2, 2)$.

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

30. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos $(2, 8)$ y $(3, 9)$.

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

31–36 Encuentre $f'(a)$.

31. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

32. $f(t) = 2t^3 + t$

33. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

34. $f(x) = x^{-2}$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

2.8 La derivada como una función

En la sección anterior se consideró la derivada de una función f en un número fijo a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Ahora se cambiará el punto de vista y hará que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, se obtiene

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}} \tag{2}$$

Dado cualquier número x para el cual este límite existe, asigne a x el número $f'(x)$. De modo que considere a f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Se sabe que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de encontrar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

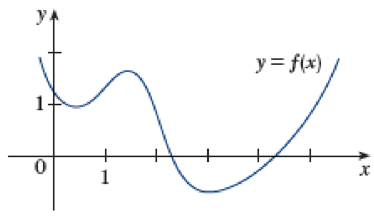
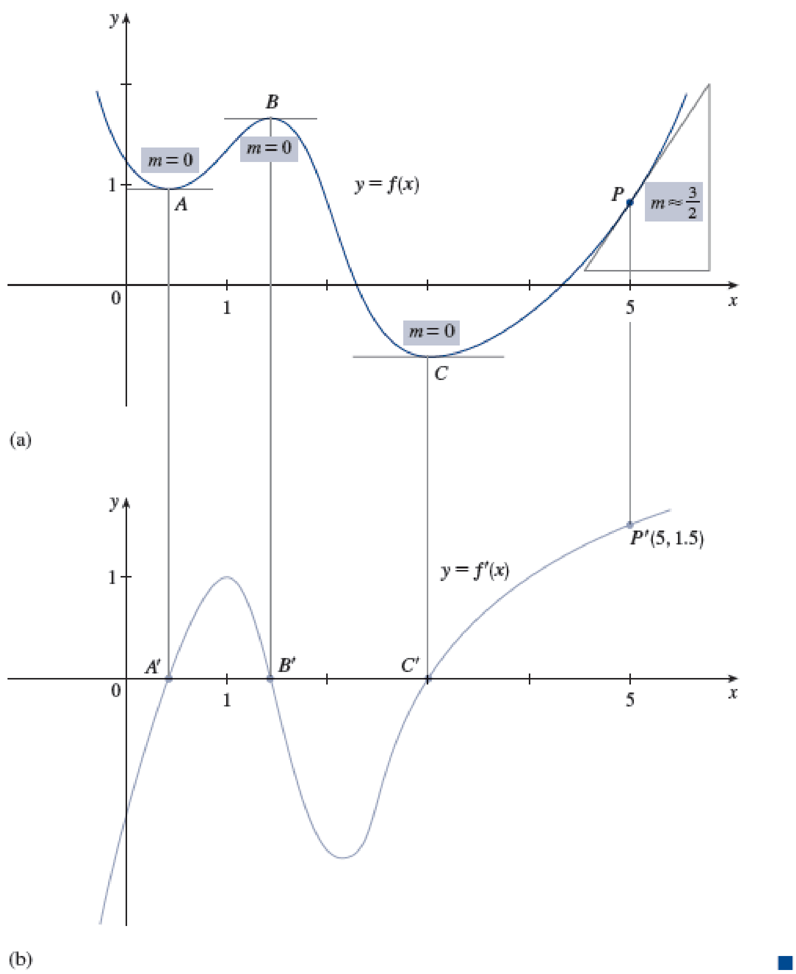


FIGURA 1

EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Utilícela para dibujar la gráfica de la derivada f'.

SOLUCIÓN Se puede calcular el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la recta tangente en P de la figura 2(a) y estime su pendiente alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. (La pendiente de la gráfica de f se convierte en el valor de y sobre la gráfica de f'.) Si repite este procedimiento en varios puntos, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2(b). Observe que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 ahí, y la gráfica de f' cruza el eje x (donde $y = 0$) en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva ahí. (La gráfica está arriba del eje x.) Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa, de modo que $f'(x)$ ahí es negativa.



EJEMPLO 2

(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.

SOLUCIÓN

(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Indique el dominio de f'.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \qquad \text{(Racionalice el numerador)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$. Este es, ligeramente menor que el dominio de f, que es $[0, \infty)$. ■

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}
\end{aligned}
$$

Otras notaciones

Si usa la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$
f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)
$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de derivación, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, introducido por Leibniz, no se debe considerar como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con la ecuación 2.7.6, se puede reescribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

3 Definición Una función f es **derivable en a** si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico a, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$. La barra vertical significa "evaluar en".

EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y se puede elegir h suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ se tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y, por consiguiente, f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir h suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

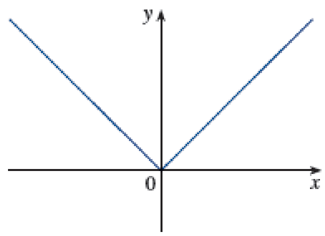
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

por lo que f es derivable para cualquier $x < 0$.

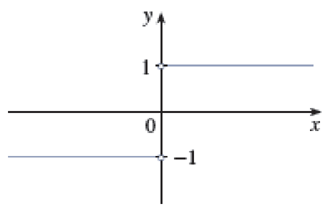
Para $x = 0$ se debe investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \qquad \text{(si existe)}$$



(a) $y = f(x) = |x|$



(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

y
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto en $x = 0$.

Una fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 5(b). El hecho de que $f'(0)$ no exista se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5(a).] ■

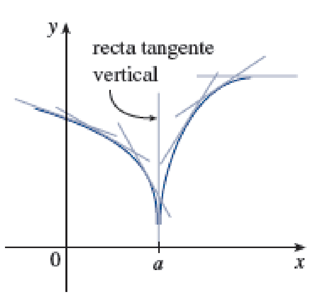
Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

4 Teorema Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

¿Cómo deja de ser derivable una función?

En el ejemplo 5 se vio que la función $y = |x|$ no es derivable en 0 y en la figura 5(a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable ahí. [Al intentar calcular $f'(a)$, se encuentra que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

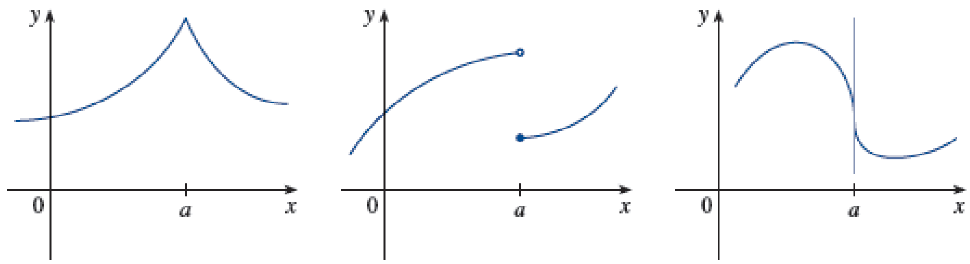
El teorema 4 da otra forma en que una función no tiene derivada. Este dice que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en a. Por lo que, en cualquier discontinuidad (por ejemplo, una discontinuidad de salto), f no es derivable.



Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en a y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7(c) muestra otra. Las tres posibilidades que se acaban de analizar se ilustran en la figura 7.



(a) Una esquina (b) Una discontinuidad (c) Una tangente vertical

FIGURA 7
Tres maneras para que *f* no sea derivable en *a*

(I) En los ejercicios 1 a 6, empleando la definición de derivada, calcule la derivada en el número indicado x_0.

(1)	$f(x) = 1 + x - 2x^2; \quad x_0 = -1$	**R.** 5
(2)	$f(x) = \dfrac{x}{2x-1}; \quad x_0 = 0$	**R.** -1
(3)	$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3-x}}; \quad x_0 = 1$	**R.** $\sqrt{2}/4$
(4)	$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}; \quad x_0 = 4$	**R.** $3\sqrt{5}/25$
(5)	$f(x) = x\sqrt{x^2+1}; \quad x_0 = 1$	**R.** $3\sqrt{2}/2$
(6)	$f(x) = xcos(x); \quad x_0 = \pi$	**R.** -1

(II) En los ejercicios del 7 al 14, empleando la definición de derivada determine la derivada de la función. Deduzca el dominio de diferenciabilidad.

(7)	$f(x) = 5x + 3$	**R.** $f'(x) = 5; \quad \text{dom}(f') = \mathbb{R}$
(8)	$f(x) = 18$	**R.** $f'(x) = 0; \quad \text{dom}(f') = \mathbb{R}$
(9)	$f(x) = x^3 - x^2 + 2x$	**R.** $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2; \quad \text{dom}(f') = \mathbb{R}$
(10)	$f(x) = \sqrt{6-x}$	**R.** $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{6-x}}; \quad \text{dom}(f') = (-\infty, 6)$
(11)	$f(x) = \sqrt{1+2x}$	**R.** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}; \quad \text{dom}(f') = (-1/2, \infty)$
(12)	$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$	**R.** $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}; \quad \text{dom}(f') = \mathbb{R} - \{1\}$
(13)	$f(x) = \dfrac{4-3x}{2+x}$	**R.** $f'(x) = -10(x+2)^{-2}; \quad \text{dom}(f') = \mathbb{R} - \{-2\}$
(14)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$	**R.** $f'(x) = -\dfrac{(x-1)^{-3/2}}{2}; \quad \text{dom}(f') = (1, \infty)$

64. Las derivadas **por la izquierda** y **por la derecha** de f en a están definidas por

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y $$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. Entonces $f'(a)$ existe si y solo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Determine $f'_{-}(4)$ y $f'_{+}(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Trace la gráfica de f.

(c) ¿Dónde es discontinua f?

(d) ¿Dónde f no es derivable?

(III) En los ejercicios del 15 a 24, realice lo siguiente: (a) Determine si la función es continua en x_0. (b) Calcule las derivadas laterales $f'_{-}(x_0)$ y $f'_{+}(x_0)$ si existen. (c) Determine si $f'(x_0)$ existe, de existir cuál es el valor.

(15) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq -4; \\ -x - 6 & \text{si} \quad x > -4 \end{cases}$ $\quad x_0 = -4$

R. *Si*; $f'_{-}(-4) = 1,\ f'_{+}(-4) = -1; f'(-4)$ no existe

(16) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0; \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

R. *Si*; $f'_{-}(0) = 0,\ f'_{+}(0) = 1; f'(0)$ no existe

(17) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0; \\ -x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$. **R.** *Si*; $f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = 0;\ f'(0) = 0$

(18) $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{si} \quad x \leq 3; \\ -4 - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ $\quad x_0 = 3$. **R.** *Si*; $f'_{-}(3) = -6,\ f'_{+}(3) = -6;\ f'(3) = -6$

(19) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x<0; \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0.$ **R.** No; $f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = 0$; $f'(0)$ no existe

(20) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0<x<2; \\ 1-\dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 2.$ **R.** Si; $f'_-(2) = f'_+(2) = -1/4$; $f'(2) = -1/4$

(21) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$; $x_0 = 2$ **R.** No; $f'_-(2)$, $f'_+(2)$ y $f'(2)$ no existen

(22) $f(x) = |1-x^2|$; $x_0 = \pm 1$ **R.** Si; $f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$; $f'(-1)$ no existe

Si; $f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$; $f'(1)$ no existe

(23) $f(x) = |x-3|$; $x_0 = 3$ **R.** Si; $f'_-(3) = -1$, $f'_+(3) = 1$; $f'(3)$ no existe

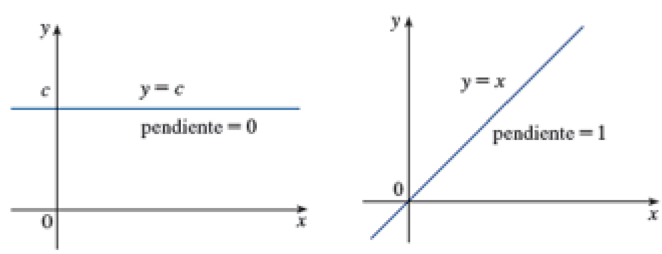
(24) $f(x) = sign(x)$; $x_0 = 0$ **R.** No; $f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$; $f'(0)$ no existe

REGLAS DE DERIVACIÓN

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$



Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

EJEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

■

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En notación prima:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En notación prima:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

■

Tabla de fórmulas de derivación

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$	$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 EJERCICIOS

1. Encuentre la derivada de $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

en dos maneras diferentes: utilizando la regla del cociente y simplificando primero. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = (3x^2 - 5x)e^x$

4. $g(x) = (x + 2\sqrt{x})\,e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 - t^2}$

9. $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$

14. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2 + x}$

15. $y = \dfrac{t^3 + 3t}{t^2 - 4t + 3}$

16. $y = \dfrac{1}{t^3 + 2t^2 - 1}$

17. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

18. $h(r) = \dfrac{ae^r}{b + e^r}$

19. $y = \dfrac{s - \sqrt{s}}{s^2}$

20. $y = (z^2 + e^z)\sqrt{z}$

21. $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{t-3}$

22. $V(t) = \dfrac{4+t}{te^t}$

23. $f(x) = \dfrac{x^2e^x}{x^2+e^x}$

24. $F(t) = \dfrac{At}{Bt^2+Ct^3}$

25. $f(x) = \dfrac{A}{B+Ce^x}$

26. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes

(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$ (c) $(g/f)'(5)$

44. Suponga que $f(4) = 2$, $g(4) = 5$, $f'(4) = 6$ y $g'(4) = -3$. Encuentre $h'(4)$.

(a) $h(x) = 3f(x) + 8g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$

(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)+g(x)}$

EJERCICIOS ADICIONALES CON RESPUESTAS

(67) $y = \dfrac{3}{x-9}$

(68) $y = \dfrac{x}{x-8}$

(69) $y = \dfrac{x+3}{x-3}$

(70) $z = \dfrac{t}{t^2+1}$

(71) $u = \dfrac{2t^3+1}{t-1}$

(72) $y = \dfrac{x^3-2x}{x^2+x+1}$

(73) $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x}$

(74) $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}$

(75) $y = \dfrac{ax^2+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(76) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} - (x-1)\left(x^2-1\right)$

(77) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

(78) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$

(79) $y = \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

(80) $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

(85) $h(t) = \dfrac{sen(t)}{1 + cos(t)}$

(86) $f(x) = \dfrac{tg(x)}{x}$

(87) $g(x) = \dfrac{1 - cos(x)}{1 + cos(x)}$

(88) $y = \dfrac{sen(t) + cos(t)}{sen(t) - cos(t)}$

(89) $y = \dfrac{tg(x) - 1}{sec(x)}$

(90) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

(91) $y = x^2\, 2^x$

(92) $y = x^2\, e^{-x}$

(93) $y = e^x\, ln(x)$

(94) $y = 2^x\, log_2(x)$

(95) $y = \dfrac{ln(x)}{e^x}$

(96) $y = \dfrac{log_2(x)}{2^x}$

(97) $y = \dfrac{1 + ln(x)}{1 - ln(x)}$

(98) $y = (x^2 - 3x + 5)^3$

(99) $f(x) = (15 - 8x)^4$

(100) $g(t) = (2t^3 - 1)^{-3}$

(101) $z = \dfrac{1}{(5x^5 - x^4)^8}$

(102) $y = (3x^2 - 8)^3 (-4x^2 + 1)^4$

Respuestas Ejercicios 67 al 102

(67) $y' = \dfrac{-3}{(x-9)^2}$

(68) $y' = \dfrac{-8}{(x-8)^2}$

(69) $y' = \dfrac{-6}{(x-3)^2}$

(70) $z' = \dfrac{1 - t^2}{(t^2+1)^2}$

(71) $u' = \dfrac{4t^3 - 6t^2 - 1}{(t-1)^2}$

(91) $y' = x2^x(2 + x\ln 2)$

(92) $y' = \dfrac{-x(x-2)}{e^x}$

(93) $y' = e^x \left[\ln x + \dfrac{1}{x}\right]$

(94) $y' = 2^x \left[\ln x + \dfrac{1}{x \ln 2}\right]$

(95) $y' = \dfrac{1 - \ln(x^x)}{xe^x}$

(96) $y' = \dfrac{1 - \ln(2)x\ln x}{\ln(2)x2^x}$

(97) $y' = \dfrac{2}{x[1-\ln x]^2}$

(98) $y' = 3(x^2-3x+5)^2(2x-3)$

(99) $f'(x) = -32(15-8x)^3$

(100) $g'(t) = \dfrac{-18t^2}{(2t^3-1)^4}$

(101) $z' = \dfrac{-8x^3(25x-4)}{(5x^5-x^4)^9}$

(102) $y' = 2x(3x^2-8)^2(-4x^2+1)^3(137-84x^2)$

(80) $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

(81) $f'(x) = 5\cos(x) - 2sen(x)$

(82) $g'(\theta) = \cot x - \theta \csc^2\theta$

(83) $y' = sen\alpha[sen^2\alpha + 1]$

(84) $y' = \sec^2 x + \csc^2 x$

(85) $h'(t) = \dfrac{1}{1+\cos t}$

(86) $f'(x) = \dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

(87) $g'(x) = \dfrac{2senx}{[1+\cos x]^2}$

(88) $y' = \dfrac{-2}{(sent - \cos t)^2}$

(89) $y' = \sec x - \dfrac{sen^2 x}{\cos x} + senx$

(72) $y' = \dfrac{x^4+2x^3+5x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

(73) $y' = a - \dfrac{c}{x^2}$

(74) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left[3ax + b - \dfrac{c}{x}\right]$

(75) $y' = \dfrac{2ax}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(76) $y' = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} - (3x^2-2x-1)$

(77) $y' = \dfrac{-2(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2}$

(78) $y' = \dfrac{-3}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$

(79) $y' = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2}$

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f también es una función, por lo que f puede tener una derivada de sí misma, denotada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se llama **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada de}} \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{primera derivada}} = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda derivada}}$$

En general, una segunda derivada se puede interpretar como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea con respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La aceleración es el cambio de velocidad que se siente cuando se acelera o se desacelera en un auto.

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Por lo que, $f(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

Ejercicios

Dada la función y, encuentre $\dfrac{d^3\,y}{dx^3}$

$$
\begin{array}{llll}
(174) & y = x^3 + 2x^2 + 6x & (175) & y = x^5 + x^4 \\
(176) & y = (3x+5)^3 & (177) & y = (3-5x)^5 \\
(178) & y = sen(7x) & (179) & y = sen(x^3) \\
(180) & y = \dfrac{1}{x-1} & (181) & y = \dfrac{3x}{1-x} \\
(182) & y = e^{3x} & (183) & y = arctg(x)
\end{array}
$$

Respuestas del 174 al 183

$$
\begin{array}{llll}
(174) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = 6 & (175) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = -27x^6\cos(x^3) - 54x^6 sen(x^3) + 6\cos(x^3) \\
(176) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 + 24x & (177) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{-6}{(x-1)^4} \\
(178) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = 162 & (179) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = 18(1-x)^{-4} \\
(180) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = -7500(3-5x)^2 & (181) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = 27e^{3x} \\
(182) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = -343\cos(7x) & (183) & \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}
\end{array}
$$

En los siguientes problemas determine $f''(2)$.

$$
\begin{array}{llllll}
(184) & f(x) = x^2 + 1 & (185) & f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x & (186) & f(t) = 2/t \\
(187) & f(u) = \dfrac{2u^2}{5-u} & (188) & f(\theta) = \Big(\cos(\pi\theta)\Big)^{-2} & (189) & f(t) = t sen(\pi/t) \\
(190) & f(s) = s(1-s^2)^3 & (191) & f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-1} & &
\end{array}
$$

Respuestas del 184 al 191

(184) $f''(2) = 2$

(185) $f''(2) = 64$

(186) $f''(2) = \frac{1}{2}$

(187) $f''(2) = \frac{100}{27}$

(188) $f''(2) = 2\pi^2$

(189) $f''(2) = \frac{-\pi^2}{8}$

(190) $f''(2) = -900$

(191) $f''(2) = 8$

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

SOLUCIÓN Por la regla del cociente se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}
\end{aligned}
$$

3.3 EJERCICIOS

1–16 Derive cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

2. $f(x) = x \cos x + 2 \tan x$

3. $f(x) = e^x \cos x$

4. $y = 2 \sec x - \csc x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4 \sec t + \tan t$

7. $h(\theta) = \csc \theta + e^\theta \cot \theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

10. $y = \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

13. $y = \dfrac{t \operatorname{sen} t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \tan t}$

15. $f(\theta) = \theta \cos \theta \operatorname{sen} \theta$

16. $f(t) = te^t \cot t$

---

32. Suponga $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea $g(x) = f(x)\operatorname{sen} x$ y $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Determine
(a) $g'(\pi/3)$ (b) $h'(\pi/3)$

21–24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes, en el punto dado.

21. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $(0, 1)$

22. $y = e^x \cos x$, $(0, 1)$

23. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$, $(\pi, -1)$

24. $y = x + \tan x$, (π, π)

25. (a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.

26. (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x + 6 \cos x$ en el punto $(\pi/3, \pi + 3)$.

27. (a) Si $f(x) = \sec x - x$, encuentre $f'(x)$.

28. (a) Si $f(x) = e^x \cos x$, obtenga $f'(x)$ y $f''(x)$.

29. Si $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, determine $H'(\theta)$y $H''(\theta)$.

30. Si $f(t) = \sec t$, determine $f''(\pi/4)$.

3.4 La regla de la cadena

Regla de la cadena Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): al principio de esta sección, se expresa a F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

se tiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si se hace $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$ ■

EJEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, por lo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la}\\\text{función}\\\text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la}\\\text{función}\\\text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la}\\\text{función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la}\\\text{función}\\\text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{\substack{\text{función}\\\text{interior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la}\\\text{función}\\\text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la}\\\text{función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la}\\\text{función}\\\text{interior}}}$$

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Haciendo $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$ en (4), se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99} \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

■

EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescriba a f: $\quad f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

Así
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3} \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

■

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, se obtiene

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{(2t+1)\cdot 1 - 2(t-2)}{(2t+1)^2} = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo se debe aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^5 \frac{d}{dx}(x^3-x+1)^4 + (x^3-x+1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1)^5$$

$$= (2x+1)^5 \cdot 4(x^3-x+1)^3 \frac{d}{dx}(x^3-x+1)$$

$$+ (x^3-x+1)^4 \cdot 5(2x+1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= 4(2x+1)^5(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + 5(x^3-x+1)^4(2x+1)^4 \cdot 2$$

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3$, por lo que se puede factorizar y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3) \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Observe que se ha aplicado dos veces la regla de la cadena. ■

3.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de las funciones siguientes.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$

2. $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$

4. $y = \tan(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \sqrt{2 - e^x}$

7–46 Obtenga la derivada de cada una de las funciones siguientes.

7. $F(x) = (5x^6 + 2x^3)^4$

8. $F(x) = (1 + x + x^2)^{99}$

9. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

11. $f(\theta) = \cos(\theta^2)$

12. $g(\theta) = \cos^2\theta$

13. $y = x^2e^{-3x}$

14. $f(t) = t \operatorname{sen} \pi t$

15. $f(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$

16. $g(x) = e^{x^2 - x}$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x + 1}}$

22. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$

23. $y = e^{\tan\theta}$

24. $f(t) = 2^{t^3}$

25. $g(u) = \left(\dfrac{u^3 - 1}{u^3 + 1}\right)^8$

26. $s(t) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}}$

27. $r(t) = 10^{2\sqrt{t}}$

28. $f(z) = e^{z/(z-1)}$

29. $H(r) = \dfrac{(r^2 - 1)^3}{(2r + 1)^5}$

30. $J(\theta) = \tan^2(n\theta)$

31. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$

32. $F(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}$

33. $G(x) = 4^{C/x}$

34. $U(y) = \left(\dfrac{y^4 + 1}{y^2 + 1}\right)^5$

35. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

36. $y = \sec^2(m\theta)$

37. $y = \cot^2(\operatorname{sen}\theta)$

38. $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

39. $f(t) = \tan(\sec(\cos t))$

40. $y = e^{\operatorname{sen} 2x} + \operatorname{sen}(e^{2x})$

41. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

42. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$

44. $y = 2^{3^{4^x}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

46. $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Encuentre y' y y''.

47. $y = \cos(\operatorname{sen} 3\theta)$

48. $y = \dfrac{1}{(1 + \tan x)^2}$

49. $y = \sqrt{1 - \sec t}$

50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = 2^x$, $(0, 1)$

52. $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

54. $y = xe^{-x^2}$, $(0, 0)$

3.5 Derivación implícita

Las funciones que se han encontrado hasta ahora se pueden describir expresando una variable explícitamente en términos de la otra variable, por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

o

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

EJEMPLO 1

(a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, 4)$.

SOLUCIÓN 1

(a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, por lo que hay que utilizar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por tanto

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora se resuelve esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) En el punto $(3, 4)$ se tiene que $x = 3$ y $y = 4$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la tangente a la circunferencia, en $(3, 4)$, es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

(b) Al resolver $x^2 + y^2 = 25$, para y, se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto (3, 4) se encuentra en la semicircunferencia superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, considere la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Al derivar f usando la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

Por lo que $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, como en la solución 1, la ecuación de la recta tangente es $3x + 4y = 25$. ■

EJEMPLO 2

(a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUCIÓN

(a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ respecto a x, considerando a y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3, y la regla del producto en el término $6xy$, se obtiene

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora se resuelve para y': $$\begin{aligned} y^2y' - 2xy' &= 2y - x^2 \\ (y^2 - 2x)y' &= 2y - x^2 \\ y' &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Determinar y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implícita respecto a x, se obtiene

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y' se obtiene

$$\boxed{3} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

Para determinar y'' se deriva esta expresión para y' aplicando la regla del cociente, considerando que y es una función de x:

$$\begin{aligned} y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) &= -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2} \\ &= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6} \end{aligned}$$

Si se sustituye la ecuación 3 en esta expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6} \\ &= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7} \end{aligned}$$

Pero los valores de x y y deben satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$, por lo que la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

■

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

EJEMPLO 5 Derive (a) $y = \dfrac{1}{\sin^{-1}x}$ y (b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$

$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1 - x^2}}$$

(b)
$$f'(x) = x\,\frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$

■

3.5 EJERCICIOS

1–4

(a) Encuentre y' por derivación implícita.

(b) Resuelva la ecuación explícita para y y derive para obtener y' en términos de x.

(c) Compruebe la coherencia de sus soluciones en los incisos (a) y (b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

4. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 4$

5–20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^2 - 4xy + y^2 = 4$

6. $2x^2 + xy - y^2 = 2$

7. $x^4 + x^2y^2 + y^3 = 5$

8. $x^3 - xy^2 + y^3 = 1$

9. $\dfrac{x^2}{x + y} = y^2 + 1$

10. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $\sqrt{x + y} = x^4 + y^4$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $\operatorname{sen}(xy) = \cos(x + y)$

20. $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

25–32 Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y, \quad (\pi/2, \pi/4)$

26. $x^2 + xy + y^2 = 3, \quad (1, 1) \quad$ (elipse)

27. $x^2 - xy - y^2 = 1, \quad (2, 1) \quad$ (hipérbola)

28. $x^2 + 2xy + 4y^2 = 12, \quad (2, 1) \quad$ (elipse)

49–60 Determine la derivada de cada una de las funciones siguientes. Simplifique donde sea posible.

49. $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\tan^{-1}x}$

51. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \arccos\sqrt{x}$

53. $F(x) = x \sec^{-1}(x^3)$

54. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

56. $R(t) = \operatorname{arcsen}(1/t)$

57. $y = x \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\operatorname{sen}^{-1} t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \; a > b > 0$

60. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

3.6 Derivadas de funciones logarítmicas

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para utilizar la regla de la cadena, se hace $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Utilizando (3), se tiene que

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, por lo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si se usa la fórmula 1 con $b = 10$, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\,\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\\[2ex] &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1-(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}\\[2ex] &= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)}\\[2ex] &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x)=\ln|x|$:

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{si } x>0\\ \ln(-x) & \text{si } x<0\end{cases}$$

se sigue que

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0\\[2ex] \dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

Por lo que, $f'(x)=1/x$ para todo $x\neq 0$. ■

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias se puede simplificar tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica.**

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, se obtiene

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Puesto que se tiene una expresión explícita para y, se puede sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$ ■

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tome logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilice las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derive implícitamente respecto a x.
3. Resuelva la ecuación resultante para y'.

EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la base y el exponente son variables, se utiliza la derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + (\ln x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

El número e como un límite

Se ha demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Debido a esto, $f'(1) = 1$. Se utilizará este hecho para expresar el número e como un límite.

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}}$$

3.6 EJERCICIOS

2–22 Derive la función.

2. $f(x) = x \ln x - x$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

6. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

7. $f(x) = \log_{10}(1 + \cos x)$

8. $f(x) = \log_{10}\sqrt{x}$

9. $g(x) = \ln(xe^{-2x})$

10. $g(t) = \sqrt{1 + \ln t}$

11. $F(t) = (\ln t)^2 \operatorname{sen} t$

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

14. $P(v) = \dfrac{\ln v}{1 - v}$

15. $F(s) = \ln \ln s$

16. $y = \ln|1 + t - t^3|$

17. $T(z) = 2^z \log_2 z$

18. $y = \ln(\csc x - \cot x)$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $H(z) = \ln\sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

21. $y = \tan[\ln(ax + b)]$

22. $y = \log_2(x \log_5 x)$

23–26 Encuentre y' y y'' en cada una de las funciones siguientes.

23. $y = \sqrt{x}\,\ln x$

24. $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

25. $y = \ln|\sec x|$

26. $y = \ln(1 + \ln x)$

27–30 Derive f y encuentre el dominio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

---

31. Si $f(x) = \ln(x + \ln x)$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \cos(\ln x^2)$, determine $f'(1)$.

51. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Determine y' si $x^y = y^x$.

33–34 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1), \quad (3, 0)$

34. $y = x^2 \ln x, \quad (1, 0)$

39–50 Utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de la función.

39. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

40. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$

42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$

43. $y = x^x$

44. $y = x^{\cos x}$

45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

46. $y = \left(\sqrt{x}\right)^x$

47. $y = (\cos x)^x$

48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

49. $y = (\tan x)^{1/x}$

50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

4.2 Teorema del valor medio

Se verá que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho central llamado teorema del valor medio. Pero para llegar a este teorema, se verá primero el resultado siguiente.

Rolle

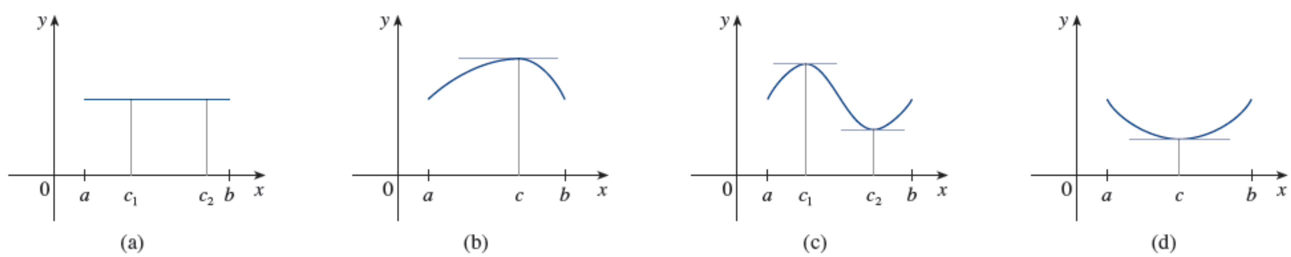
El teorema de Rolle fue publicado en 1691 por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719), en un libro titulado *Méthode pour resoudre les Egalitez*. Fue un crítico de los métodos de su tiempo y calificó al cálculo como una "colección de falacias ingeniosas". Más tarde, sin embargo, se convenció de la esencial exactitud de los métodos del cálculo.

Teorema de Rolle Sea f una función que satisface las tres hipótesis siguientes:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar la demostración, se verán las gráficas de algunas funciones típicas que satisfacen las tres hipótesis. La figura 1 muestra las gráficas de cuatro de estas funciones. En cada caso parece que hay al menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la recta tangente es horizontal y, por tanto, $f'(c) = 0$. Por lo que, el teorema de Rolle es razonable.



El principal uso del teorema de Rolle es demostrar el siguiente teorema importante, establecido por primera vez por el matemático francés Joseph-Louis Lagrange.

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las hipótesis siguientes:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c en (a, b) tal que

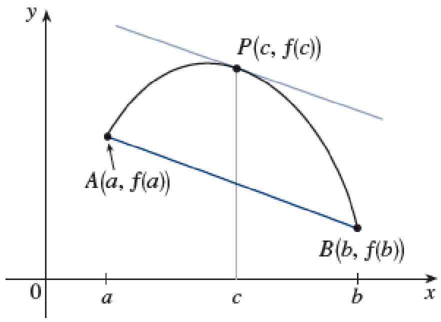
1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

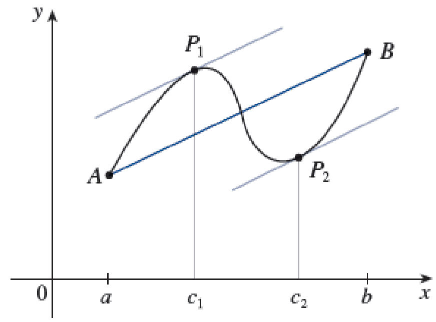
o en forma equivalente

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demostrar este teorema, se puede ver su interpretación geométrica. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ en las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la recta secante AB es

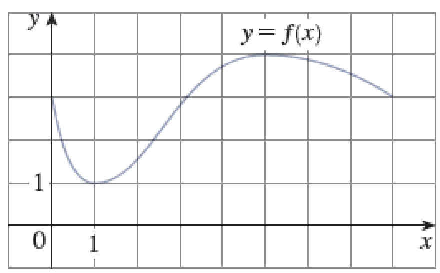
3 $$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



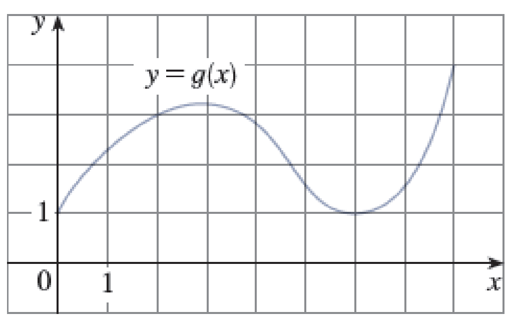


4.2 EJERCICIOS

1. Se muestra la gráfica de una función f. Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 8]. Después encuentre todos los números c en ese intervalo, que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.



3. Se muestra la gráfica de una función g.



(a) Verifique que g satisface las hipótesis del teorema de valor medio en el intervalo [0, 8].

(b) Calcule el(los) valor(es) de c que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio en el intervalo [0, 8].

(c) Calcule el(los) valor(es) de c que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio en el intervalo [2, 6].

5–8 Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Luego encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad [-1, 3]$

6. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2, \quad [-2, 2]$

7. $f(x) = \operatorname{sen}(x/2), \quad [\pi/2, 3\pi/2]$

8. $f(x) = x + 1/x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

11–14 Verifique que la función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

11. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

12. $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad [-2, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

17. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay ningún valor de c en $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué no contradice esto el teorema del valor medio?

18. Sea $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Demuestre que no hay valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

4.4 Formas indeterminadas y regla de L'Hôpital

Suponga que se trata de analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, se necesita saber cómo se comporta *cerca* de 1. En particular, le gustaría saber el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Para el cálculo de este límite no se puede aplicar la ley 5 de los límites (el límite de un cociente es el cociente de los límites, consulte la sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aunque en la expresión (1) existe el límite, su valor no es obvio porque el numerador y denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si se tiene un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to 0$ como $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$, entonces este límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.** Se encuentran algunos límites de este tipo en el capítulo 2. Para funciones racionales, se pueden eliminar factores comunes:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Regla de L'Hôpital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, se tiene una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

NOTA 1 La regla de L'Hôpital indica que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumpla con las condiciones dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones impuestas a los límites de f y g antes de utilizar la regla de L'Hôpital.

NOTA 2 La regla de L'Hôpital también es válida para límites unilaterales y límites al infinito o al infinito negativo; es decir, "$x \to a$" se puede sustituir por cualesquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de L'Hôpital es cierta. De hecho, utilizando la forma alternativa de la definición de una derivada, se tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad [\text{ya que } f(a) = g(a) = 0]$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Dado que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

El límite es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

■

EJEMPLO 2 Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Se tiene $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, por lo que el límite tiene una forma indeterminada del tipo ∞/∞, y la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}$$

Ya que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ conforme $x \to \infty$ el límite del lado derecho también está indeterminado, pero aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$ ■

EJEMPLO 3 Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $\ln x \to \infty$ y $\sqrt{x} \to \infty$ conforme $x \to \infty$, se utiliza la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}$$

Observe que ahora el límite del lado derecho es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Pero en lugar de aplicar la regla de L'Hôpital una segunda vez, como se hizo en el ejemplo 2, primero se simplificó la expresión y se ve que la segunda aplicación no es necesaria:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$ ■

EJEMPLO 4 Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$. (Véase el ejercicio 2.2.50.)

SOLUCIÓN Se observa que tanto $\tan\ x - x \to 0$ como $x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, por lo que se aplica la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Ya que el límite del lado derecho es aún una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se vuelve a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x}$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} \sec^2 x = 1$, se simplifica el cálculo escribiendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \sec^2 x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Se puede evaluar este último límite utilizando la regla de L'Hôpital por tercera vez o escribiendo la $\tan x$ como $(\text{sen } x)/(\cos x)$ y recurriendo al conocimiento de límites trigonométricos. Haciendo todos estos pasos, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$ ■

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\text{sen } x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si se intenta utilizar a ciegas la regla de L'Hôpital, se obtendría

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\infty$$

¡Esto es erróneo! Aunque el numerador $\text{sen } x \to 0$ conforme $x \to \pi^-$, observe que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, por lo que aquí no es posible aplicar la regla de L'Hôpital.

El límite requerido es, de hecho, fácil de encontrar porque la función es continua en π y el denominador es distinto de cero:

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \frac{\text{sen } \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$ ■

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $\mathbf{0 \cdot \infty}$**, y se puede abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{y} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞ por lo que se puede utilizar la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

SOLUCIÓN El límite dado está indeterminado porque, conforme $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, mientras que el segundo factor ($\ln x$) tiende a $-\infty$. Escribiendo $x = 1/(1/x)$, se tiene $1/x \to \infty$ a medida que $x \to 0^+$, por lo que la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$ ■

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se llama **forma indeterminada de tipo $\infty - \infty$**. Una vez más hay una contienda entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (gana f) o será $-\infty$ (gana g) o habrá un término intermedio en un número finito? Para encontrarlo, se intenta convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, utilizando un común denominador, racionalizando o factorizando un factor común), de manera que se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

SOLUCIÓN Primero observe que $1/(\ln x)\to\infty$ y $1/(x-1)\to\infty$ conforme $x\to 1^+$, por lo que el límite está indeterminado $\infty-\infty$. Aquí se usa un común denominador:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

Tanto el numerador como el denominador tienen un límite igual a 0, por lo que la regla de L'Hôpital es aplicable, lo que da

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}$$

De nuevo se tiene un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que se aplica de nuevo la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2+\ln x}=\frac{1}{2}$$

■

EJEMPLO 8 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x)$.

SOLUCIÓN Esta es una diferencia indeterminada porque tanto e^x como x tienden a infinito. Se espera que el límite sea infinito porque $e^x\to\infty$ mucho más rápido que x. Pero se puede verificar esto al factorizar x:

$$e^x-x=x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)$$

El término $e^x/x\to\infty$ cuando $x\to\infty$ por la regla de L'Hôpital y así ahora se tiene un producto en el cual crecen mucho ambos factores:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)\right]=\infty$$

■

EJEMPLO 9 Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Primero observe que cuando $x \to 0^+$, se tiene $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite dado está indeterminado (tipo 1^∞). Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $$\ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x) = \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x}$$

por lo que la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora se ha calculado el límite de $\ln y$, pero lo que se quiere es el límite de y. Para encontrar este límite, se utiliza el hecho de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 10 Determine $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Observe que este límite está indeterminado ya que $0^x – 0$ para cualquier $x > 0$ pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. (Recuerde que 0^0 está indefinido.) Se puede proceder como en el ejemplo 9 o escribir la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el ejemplo 6 se utiliza la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Por tanto

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \qquad \blacksquare$$

4.4 EJERCICIOS

8–68 Encuentre el límite. Utilice la regla de L'Hôpital donde sea apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de usarlo. Si no aplica la regla de L'Hôpital, explique por qué.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{\operatorname{sen} t}$

16. $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta}$

17. $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\cos 2\theta}$

18. $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi} \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{sen}\pi x}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$

23. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^8-1}{t^5-1}$

24. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{8^t-5^t}{t}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

26. $\displaystyle\lim_{u\to\infty} \frac{e^{u/10}}{u^3}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x-x}{x^3}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{\tan x}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x3^x}{3^x - 1}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x \operatorname{sen}(x-1)}{2x^2 - x - 1}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(2x)}{\ln x}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}, \quad b \neq 0$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2}$

42. $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 5x \csc 3x$

46. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

47. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

48. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{3/2} \operatorname{sen}(1/x)$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln x \tan(\pi x/2)$

50. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

51. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

52. $\lim\limits_{x\to 0}(\csc x-\cot x)$

53. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

54. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan^{-1}x}\right)$

55. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$

56. $\lim\limits_{x\to 1^+}[\ln(x^7-1)-\ln(x^5-1)]$

57. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sqrt{x}}$

58. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan 2x)^x$

59. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

60. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

61. $\lim\limits_{x\to 1^+}x^{1/(1-x)}$

62. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}$

63. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$

64. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{e^{-x}}$

65. $\lim\limits_{x\to 0^+}(4x+1)^{\cot x}$

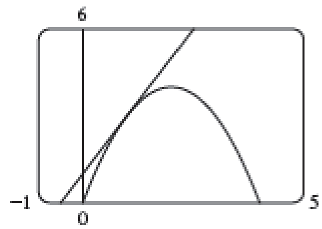
66. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

Respuestas

EJERCICIOS 2.7 ■

1. (a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

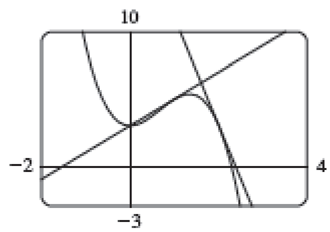
3. (a) 2 (b) $y = 2x + 1$ (c)



5. $y = -8x + 12$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

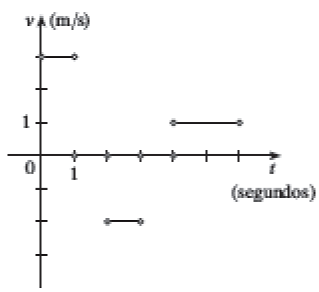
9. (a) $8a - 6a^2$ (b) $y = 2x + 3$, $y = -8x + 19$

(c)



11. (a) Derecha: $0 < t < 1$ y $4 < t < 6$; izquierda: $2 < t < 3$; en estado de quietud: $1 < t < 2$ y $3 < t < 4$

(b)



13. -9.6 m/s

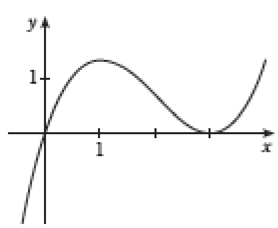
15. $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

17. $g'(0), 0, g'(4), g'(2), g'(-2)$

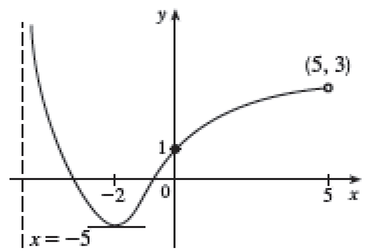
19. (a) 26 (b) No (c) Sí

21. $f(2) = 3$; $f'(2) = 4$

23.

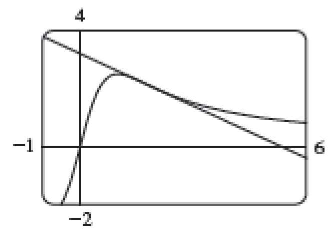


25.



27. $y = 3x - 1$

29. (a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ (b)



31. $6a - 4$ **33.** $\dfrac{5}{(a+3)^2}$ **35.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-2a}}$

37. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$ **39.** $f(x) = x^6$, $a = 2$

EJERCICIOS 3.3 ■

1. $f'(x) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$ **3.** $f'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

5. $g'(t) = 3t^2 \cos t - t^3 \operatorname{sen} t$

7. $h'(\theta) = -\csc\theta\cot\theta + e^\theta(\cot\theta - \csc^2\theta)$

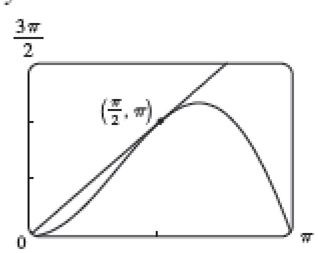
9. $y' = \dfrac{2 - \tan x + x\sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$

13. $y' = \dfrac{(t^2 + t)\cos t + \operatorname{sen} t}{(1+t)^2}$

15. $f'(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \theta\cos 2\theta$

21. $y = x + 1$ **23.** $y = x - \pi - 1$

25. (a) $y = 2x$ (b)



27. (a) $\sec x \tan x - 1$

29. $\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; $2\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta$

EJERCICIOS 3.4 ■

1. $4 \cos 4x$ **3.** $-20x(1-x^2)^9$ **5.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

7. $F'(x) = 24x^{11}(5x^3+2)^3(5x^3+1)$

9. $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$ **11.** $f'(\theta) = -2\theta \operatorname{sen}(\theta^2)$

13. $y' = xe^{-3x}(2-3x)$ **15.** $f'(t) = e^{at}(b \cos bt + a \operatorname{se}$

17. $f'(x) = (2x-3)^3(x^2+x+1)^4(28x^2-12x-7)$

19. $h'(t) = \frac{2}{3}(t+1)^{-1/3}(2t^2-1)^2(20t^2+18t-1)$

21. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^{3/2}}$ **23.** $y' = (\sec^2\theta)\, e^{\tan\theta}$

25. $g'(u) = \dfrac{48u^2(u^3-1)^7}{(u^3+1)^9}$ **27.** $r'(t) = \dfrac{(\ln 10)10^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$

29. $H'(r) = \dfrac{2(r^2-1)^2(r^2+3r+5)}{(2r+1)^6}$

31. $F'(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}(2t \cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$

33. $G'(x) = -C(\ln 4)\dfrac{4^{C/x}}{x^2}$

35. $y' = 2\cos(\tan 2x)\sec^2(2x)$

37. $y' = -2\cos\theta \cot(\operatorname{sen}\theta)\csc^2(\operatorname{sen}\theta)$

39. $f'(t) = -\sec^2(\sec(\cos t))\sec(\cos t)\tan(\cos t)\operatorname{sen} t$

41. $f'(t) = \sec^2(e^t)e^t + e^{\tan t}\sec^2 t$

43. $g'(x) = 2r^2p(\ln a)(2ra^{rx}+n)^{p-1}a^{rx}$

45. $y' = \dfrac{-\pi\cos(\tan\pi x)\sec^2(\pi x)\operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}$

47. $y' = -3\cos 3\theta \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 3\theta)$;
$y'' = -9\cos^2(3\theta)\cos(\operatorname{sen} 3\theta) + 9(\operatorname{sen} 3\theta)\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 3\theta)$

49. $y' = \dfrac{-\sec t \tan t}{2\sqrt{1-\sec t}}$;
$y'' = \dfrac{\sec t(3\sec^3 t - 4\sec^2 t - \sec t + 2)}{4(1-\sec t)^{3/2}}$

51. $y = (\ln 2)x + 1$ **53.** $y = -x + \pi$

EJERCICIOS 3.5 ■

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$

3. (a) $y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}$ (b) $y = (1 - \sqrt{x})^2$, $y' = 1 - 1/\sqrt{x}$

5. $y' = \dfrac{2y - x}{y - 2x}$ **7.** $y' = -\dfrac{2x(2x^2 + y^2)}{y(2x^2 + 3y)}$

9. $y' = \dfrac{x(x + 2y)}{2x^2y + 4xy^2 + 2y^3 + x^2}$ **11.** $y' = \dfrac{-2xy^2 - \operatorname{sen} y}{2x^2y + x\cos y}$

13. $y' = \dfrac{1 - 8x^3\sqrt{x + y}}{8y^3\sqrt{x + y} - 1}$ **15.** $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$

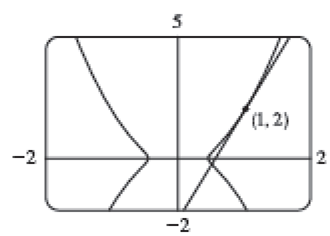
17. $y' = \dfrac{1 + x^4y^2 + y^2 + x^4y^4 - 2xy}{x^2 - 2xy - 2x^5y^3}$

19. $y' = -\dfrac{y\cos(xy) + \operatorname{sen}(x + y)}{x\cos(xy) + \operatorname{sen}(x + y)}$ **21.** $-\frac{16}{13}$

23. $x' = \dfrac{-2x^4y + x^3 - 6xy^2}{4x^3y^2 - 3x^2y + 2y^3}$ **25.** $y = \frac{1}{2}x$

27. $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ **29.** $y = x + \frac{1}{2}$ **31.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$

33. (a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ (b)



35. $-1/(4y^3)$ **37.** $\dfrac{\cos^2 y\cos x + \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} y}{\cos^3 y}$ **39.** $1/e^2$

41. (a) Ocho; $x \approx 0.42, 1.58$

(b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ (c) $1 \mp \frac{1}{3}\sqrt{3}$

43. $\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{3}, \pm\frac{5}{4}\right)$ **45.** $(x_0x/a^2) - (y_0y/b^2) = 1$

49. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$ **51.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}$

53. $F'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^6 - 1}} + \sec^{-1}(x^3)$ **55.** $h'(t) = 0$

57. $y' = \operatorname{sen}^{-1}x$ **59.** $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}$

61. $1 - \dfrac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

EJERCICIOS 3.6 ■

1. La fórmula de derivación es la más simple.

3. $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ **5.** $f'(x) = \dfrac{1}{5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}$

7. $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)\ln 10}$ **9.** $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

11. $F'(t) = \ln t\left(\ln t \cos t + \dfrac{2 \operatorname{sen} t}{t}\right)$

13. $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$ **15.** $F'(s) = \dfrac{1}{s \ln s}$

17. $T'(z) = 2^z\left(\dfrac{1}{z \ln 2} + \ln z\right)$

19. $y' = \dfrac{-x}{1 + x}$ **21.** $y' = \sec^2[\ln(ax + b)]\dfrac{a}{ax + b}$

23. $y' = (2 + \ln x)/(2\sqrt{x})$; $y'' = -\ln x/(4x\sqrt{x})$

25. $y' = \tan x$; $y'' = \sec^2 x$

27. $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - (x - 1)\ln(x - 1)}{(x - 1)[1 - \ln(x - 1)]^2}$;
$(1, 1 + e) \cup (1 + e, \infty)$

29. $f'(x) = \dfrac{2(x - 1)}{x(x - 2)}$; $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **31.** 2

33. $y = 3x - 9$ **35.** $\cos x + 1/x$ **37.** 7

39. $y' = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6\left(\dfrac{10}{2x + 1} + \dfrac{24x^3}{x^4 - 3}\right)$

41. $y' = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}\left(\dfrac{1}{2x - 2} - \dfrac{2x^3}{x^4 + 1}\right)$

43. $y' = x^x(1 + \ln x)$

45. $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln x\right)$

47. $y' = (\cos x)^x(-x \tan x + \ln \cos x)$

49. $y' = (\tan x)^{1/x}\left(\dfrac{\sec^2 x}{x \tan x} - \dfrac{\ln \tan x}{x^2}\right)$

EJERCICIOS 4.2 ■

1. 1, 5

3. (a) g es continua en [0, 8] y derivable en (0, 8).
(b) 2.2, 6.4 (c) 3.7, 5.5

5. 1 **7.** π

9. f no es derivable en $(-1, 1)$ **11.** 1

13. $-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{6}(1 - e^{-6})\right]$ **15.** 1; sí

17. f no es continua en 3 **25.** 16 **27.** No **33.** No

EJERCICIOS 4.4 ■

1. (a) Indeterminada (b) 0 (c) 0
(d) ∞, $-\infty$, o no existe (e) Indeterminada

3. (a) $-\infty$ (b) Indeterminada (c) ∞

5. $\frac{9}{4}$ **7.** 1 **9.** 6 **11.** $-\frac{1}{3}$

13. $-\infty$ **15.** 2 **17.** $\frac{1}{4}$ **19.** 0 **21.** $-\infty$

23. $\frac{8}{5}$ **25.** 3 **27.** $\frac{1}{2}$ **29.** 1 **31.** 1

33. $1/\ln 3$ **35.** 0 **37.** 0 **39.** a/b

41. $\frac{1}{2}a(a-1)$ **43.** 3 **45.** $\frac{5}{3}$ **47.** 0 **49.** $-2/\pi$

51. $\frac{1}{2}$ **53.** $\frac{1}{2}$ **55.** ∞ **57.** 1 **59.** e^{-2}

61. $1/e$ **63.** 1 **65.** e^4 **67.** e^3 **69.** e^2