Matemática II

POSTGRADO

Maestría
Enseñanza Aprendizaje de las Ciencias Básicas

Dr. Gilberto Paredes

Laboratorio de Física aplicada y Computacional (LFAC)

http://www.unet.edu.ve/lfac

Líneas de Investigación

Caos, Sistemas Complejos, Física Computacional, Econofísica, Astronomía, Astrofísica, Enseñanza de las ciencias naturales.

Laboratorio de Matemática Pura y Aplicada (LIMPA)

Líneas de Investigación

Maestría en Enseñanza Aprendizaje de las Ciencias Básicas

- ¿Qué enseñamos? ⟷ ¿Para qué?
- ¿Cómo enseñamos? ⟷ ¿Para quién?

Maestría en Enseñanza Aprendizaje de las Ciencias Básicas

Darío Durán Cepeda, Doctor *Honoris Causa* de LUZ, afirma, tras casi 50 años dando clases, que "***la matemática no se enseña, no se puede enseñar, nadie puede enseñar matemática***. **La matemática se aprende, si usted quiere aprender"**.

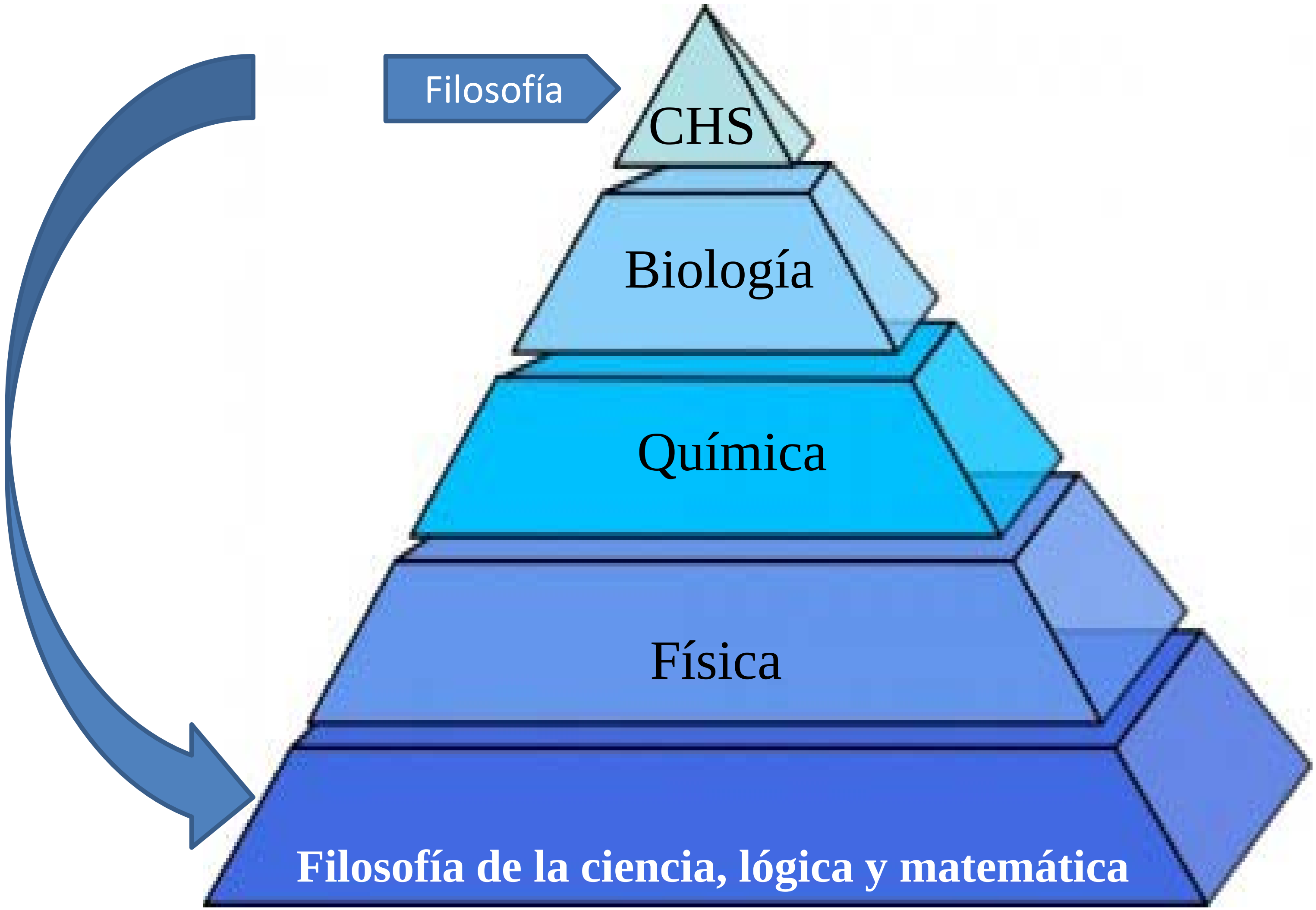
Las descripciones deben preceder a las definiciones

Peslozzi . Las descripciones deben preceder a las definiciones

Paso de lo concreto a lo abstracto

“Cuanto más tiempo nuestros niños se dediquen al estudio de lo concreto, cuanto más tiempo empleen en la observación, tanto mejor pasaran, entonces, a la comprensión de las formas abstractas”

Ciencias


Filosofía
CHS
Biología
Química
Física
Filosofía de la ciencia, lógica y matemática

Las Matemáticas

Filosofía de la ciencia	Como se hace ciencia
Lógica	Como se razona
Matemática	Proporciona métodos para resolver problemas complejos

Matemática

No es natural → Origen de sus conceptos → Convencional

definiciones

Conceptos primitivos ⟷ Conceptos derivados

Axiomas

Teoremas

Leyes

La Física y otras ciencias

Física

natural → Estudia componentes Básicos → Naturaleza → Leyes que satisfacen

Leyes físicas — Expresiones matemáticas

Teorías físicas — Teorías matemáticas

Matemática ⟷ Física

287-212 a.c

1642-1727

1700-1782

1768-1830

1777-1885

Las otras ciencias básicas

Química

natural

Átomos y moléculas

Como se forman propiedades

Leyes

Explicación en la Física

Químico-Matemática

Biología

natural

Seres vivos

Ciencias humanas y sociales

Psicología

Antropología

Sociología

Biología

Ciencias naturales y sociales

Matemáticas

Filosofía

Ciencia humana

Punto de partida

Proposición — Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez

Lema — Es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema menor o una premisa auxiliar que forma parte de un teorema más general

Axioma — Un axioma es una proposición que se considera **evidente** y se acepta sin requerir demostración previa.

Teorema — Es toda proposición que partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una verdad (tesis) no evidente por sí misma

Ley — es algo que siempre se cumple

Postulado — es una proposición no evidente por sí misma, ni demostrada, pero que se acepta ya que no existe otro principio del que pueda ser deducida.

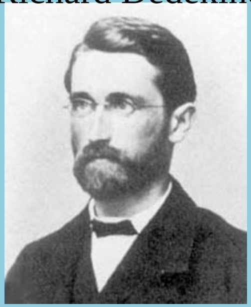
Corolario — Es una consecuencia tan evidente que no necesita demostración

Las **matemáticas** o la **matemática**[1] (del latín *mathematĭca*, 'conocimiento') es una ciencia formal que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas como números, figuras geométricas o símbolos.

Números naturales

Mesopotamia alrededor del año 4.000 a.c

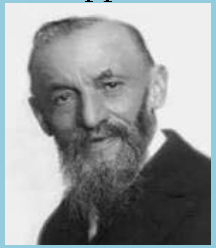
Richard Dedekind



(1831-1916)

Richard Dedekind en el siglo XIX, una base sólida de los números naturales

Giuseppe Peano



(1858-1932)

Axiomas de Peano

Conjunto de axiomas aritméticos para definir los números naturales

- Si *n* es un número natural, entonces el sucesor de *n* también es un número natural.
- El 1 no es el sucesor de ningún número natural.
- Si hay dos números naturales *n* y *m* con el mismo sucesor, entonces *n* y *m* son el mismo número natural.
- Si el 1 pertenece a un conjunto de números *A*, y además siempre se verifica que: dado un número natural cualquiera que esté en *A*, su sucesor también pertenece a *A*; entonces *A* contiene al conjunto de todos los números naturales. Este es el axioma de inducción, que captura la idea de inducción matemática.

Números naturales

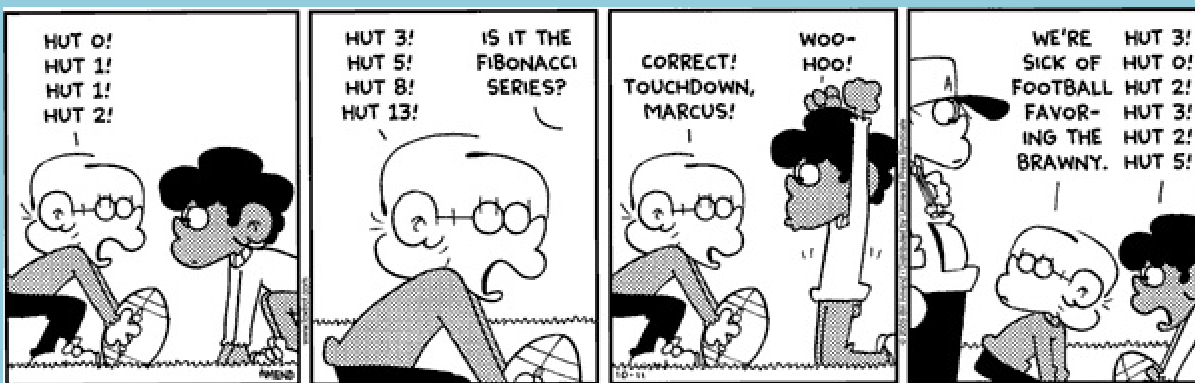
Teoría de Conjuntos incluye al cero dentro de este grupo
Teoría de Números prefiere excluirlo

Los números naturales tienen dos grandes usos: se utilizan para especificar el tamaño de un conjunto finito y para describir qué posición ocupa un elemento dentro de una secuencia ordenada.

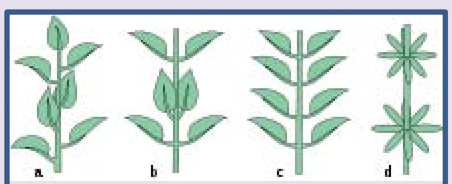
Sucesión de Fibonacci : sucesión infinita de números naturales

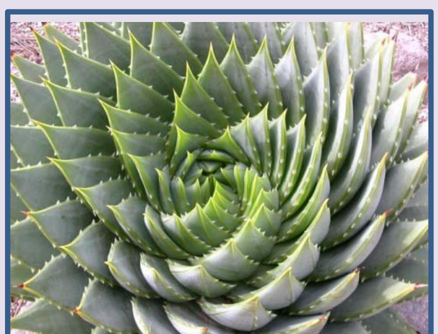
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610

Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos



También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa





filotaxis

Disposición que presentan las hojas en el tallo

Números enteros (Z)

Proviene del Alemán *Zahlen* (números)

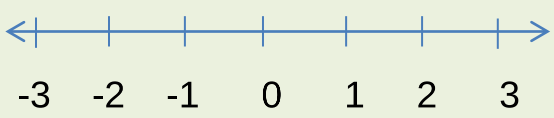
La resta de dos números naturales no es un número natural cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, ya que su valor es negativo.

El **orden de los números enteros** se define como

Dados dos números enteros de signos distintos, $+a$ y $-b$, el numero negativo es menor que el positivo: $-b < +a$.

Dados dos números enteros con el mismo signo, el *menor* de los dos números es:

- El de menor valor absoluto, si el signo común es (+).
- El de mayor valor absoluto, si el signo común es (−).



El cero, 0, es menor que todos los positivos y mayor que todos los negativos.

Los números enteros no tienen ***parte decimal***

Números Racionales (Q)

deriva de "cociente" (*Quotient* en varios idiomas europeos)

Los números racionales son aquellos que podemos representar por medio de un cociente de dos números enteros con denominador diferente de cero y los irracionales son todos los demás números.

Los números racionales pueden describirse como aquellos cuya representación decimal es eventualmente periódica y los irracionales son los que tienen una expansión decimal aperiódica. Desde esta concepción, son racionales todos los números naturales y los enteros.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z \;\; y \;\; b \neq 0 \right\}$$

Todo numero racional se puede representar por medio de una cantidad decimal finita o periódica. El reciproco también es cierto. Los números que no tienen esta propiedad no son racionales y se les denomina irracionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, e , π , , $\sqrt[3]{5}$, $\log_2 5$ son irracionales. No podemos escribir sus valores exactos como decimales. En el mejor de los casos podemos aproximar sus valores decimales utilizando una tabla, calculadora o una computadora. ***Si tomamos todos los números racionales junto a los irracionales formamos el conjunto de los reales***

Los números reales.

Durante los siglos XVI y XVII el Calculo avanzo mucho pero carecía de una base rigurosa, lo que conllevo a una serie de paradojas y problemas lógicos que hicieron evidentes la necesidad de crear una base rigurosa para la matemática, la cual consistió de definiciones formales y rigurosas del concepto de numero real.

El estudio riguroso de los números reales exige tener de amplios antecedentes en teoría de conjuntos y lógica matemática.

La construcción y sistematización de los números reales fue lograda en el siglo XIX por dos matemáticos en dos vías distintas: la teoría de conjuntos de George Cantor y el análisis matemático de Richard Dedekind.

Lograron la sistematización de los números reales no de forma espontanea sino utilizando todos los avances previos en la materia: desde la antigua Grecia y pasando por matemáticos como Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Cauchy y Weierstras

En la practica manejamos a los números reales desde su noción mas informal como el conjunto de todos los números decimales y distinguimos entre ellos a los números racionales y los irracionales.

Propiedades de los números reales

En R están definidas dos operaciones, llamadas adición (+) y multiplicación (.) que cumplen ciertas condiciones especificas a continuación. La adición hace corresponder a cada par de elementos $x, y \in R$; , su suma $x + y \in R$ mientras que la multiplicación asocia a estos elementos su producto $x.y \in R$.

Los axiomas a los que obedecen estas operaciones son

Asociatividad: Para cualesquiera $x.y, z \in R$ se tiene que

$$(x + y) + z = x(y + z) \qquad (x.y)z = x.(y.z)$$

Conmutatividad: Para cualesquiera $x.y \in R$ se tiene que

$$x + y = y + x \qquad x.y = y.x$$

Elemento neutro: existen en R dos elementos distintos 0 y 1 tales que para cualquier $x \in R$ se cumple

$$x + 0 = x \qquad x.1 = x$$

Inversos: todo $x \in R$ posee un inverso $-x \in R$ tal que $x + (-x) = 0$ y si $x \neq 0$ y también existe un inverso multiplicativo $x^{-1} \in R$ tal que $x.x^{-1} = 1$

Distributiva: Para cualesquiera $x.y, z \in R$ se tiene que

$$x.(y + z) = x.y + x.z$$

Teorema 1

1. $x.0 = 0$

2. $x.y = 0, \text{ entonces } x = 0 \text{ ó } y = 0$

3. $-(-x) = x$

4. $x.(-y) = (-x).y = -(x.y)$

5. $(-x).(-y) = x.y$

6. $Si \ \ x^2 = y^2 \text{ entonces } x = \pm y$

Orden en R

Existe un subconjunto R^+ en R, llamado el conjunto de los números reales positivos, que cumple las siguientes condiciones:

P1. La suma y el producto de dos números reales positivos son positivos. Es decir, para $x, y \in R^+$ se tiene que $x + y \in R^+$ y $x.y \in R^+$.

P2. Dado $x \in R^+$ una y solo una de las tres alternativas se verifican $x \in R$, $-x \in R^+$ o $x = 0$.

Si indicamos mediante R^- al conjunto de todos los números $-x$, donde $x \in R^+$, la condición P2. nos dice que $R = R^+ \cup R^- \cup \{0\}$ y que los conjuntos R^+, R^- y $\{0\}$ son disjuntos dos a dos. Los números $y \in R^-$ se llaman números negativos.

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos si se cumple que ningún elemento de A lo es de B o viceversa

$$x \in A \rightarrow x \notin B \;\; y \;\; x \in B \rightarrow x \notin A$$

Dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen ningún elemento en común. Equivalentemente, dos conjuntos son disjuntos si su intersección es vacía.

$$A \cap B = \phi$$

Por ejemplo, {1, 2, 3} y {4, 5, 6} son conjuntos disjuntos.

Teorema 2

Para $x \in R$ con $x \neg 0$, se tiene que $x^2 \in R^+$, en particular como $1 = 1^2$ se tiene que $1 \in R^+$.

Se escribe $x < y$, y se dice que x es menor que y cuando $y - x \in R^+$ esto es que $y = x + z$ con $z \in R^+$. También se escribe $y > x$ y se dice que y es mayor que x. En particular, $x > 0$ significa que $x \in R^+$, esto es que x es positivo, mientras que $x < 0$ quiere decir x es negativo, esto es, que $-x \in R^+$.

Propiedades para la relación de orden $<$:

Transitividad: *Si* $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$

Tricotomía: Dados $x, y \in R$, ocurre una y sólo una de las siguientes alternativas $x < y$ ó $y < x$ ó $x = y$

Monotonía de la adición: Si $x < y$, entonces para $z \in R$ se cumple que $x + z < y + z$.

Monotonía de la multiplicación: *Si* $x < y$ y $z > 0$, entonces $x.z < y.z$. Si por el contrario $z < 0$ entonces $x.z > y.z$.

Proposición

- Para $x, x', y, y' \in R$ se cumple $x < x'$ y $y < y'$ entonces $x + x' < y + y'$.
- Si $0 < x < x'$ y $0 < y < y'$, entonces $x.y < x'.y'$
- Si $0 < x < y$, entonces $y^{-1} < x^{-1}$.

Como $1 \in R$, es positivo, de lo anterior, $1 < 1+1 < 1+1+1 < \ldots$. Podemos considerar $N \subset R$ se tiene

Que $Z \subset R$, pues $0 \in R$ y $n \in R$, entonces $-n \in R$. Además si $n, m \in Z$ con $n \neq 0$, entonces $\frac{m}{n} \in R$

Lo que nos permite concluir que $Q \subset R$. Así

$$\boxed{N \subset Z \subset Q \subset R}$$

En matemática los números reales comprende a los números racionales y a los números irracionales.
Los números reales pueden ser descritos y construidos de varias formas, algunas simples y carentes del rigor necesario para los propósitos formales y otros mas complejos pero con el rigor necesario para el trabajo matemático formal.