Igualdades

desigualdades

$=$ inventado en 1557 por el Galés Robert Recorde.

Robert Recorde (1510-1558)

Recorde empleó por primera vez el signo igual en su libro de álgebra, “The Whetstone of Witte” (El aguzador del ingenio o la Piedra de afilar el Ingenio) publicado en 1557.

$(>, <, \geq, \leq)$

matemático ingles

Thomas Harriot (1560-1621)

"Artis Analyticae Praxis" fue publicado en Londres en 1631 y trata de teoría de ecuaciones.

∞

Latín infinitus

"in" no o sin,
finis fin o limite

filósofo griego Anaximander, quién usó el terminó "sin fronteras"

lemniscate y fue inventado en el 1655 por el matemático John Wallis

Fue Bernoulli, quien le pusiera el nombre de Lemniscus (que significa lazo).

Ecuaciones

aequationis → **de igualar o nivelar cosas**

Las ecuaciones pueden clasificarse según el tipo de operaciones necesarias para definirlas y según el conjunto de números sobre el que se busca la solución.

Ecuaciones algebraicas

- ✓De primer grado o *lineales*
- ✓De segundo grado o *cuadráticas*
- ✓Diofánticas o diofantinas: ecuaciones cuyas soluciones son números enteros
- ✓Racionales, aquellas en las que uno o ambos miembros se expresan como un cociente de polinomios

Ecuaciones trascendentes, cuando involucran funciones no polinómica, como las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.

Ecuaciones diferenciales

- ✓Ordinarias
- ✓En derivadas parciales

Ecuaciones integrales

Ecuaciones funcionales

Ecuaciones

XVI
AC

Los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales

I
DC

Los matemáticos chinos escribieron el libro **Jiu zhang suan shu** (que significa El Arte del cálculo), en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones.

III
DC

El matemático griego Diofanto de Alejandría publicó su Aritmética en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa las ecuaciones de primer grado. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega arithmos, que significa número.

Ecuaciones

Lineales

Una proposición como $3(x+3) = x+5$ es ejemplo de una ecuación lineal, porque la variable x solo aparece elevada a la primera potencia.

Resolver una ecuación quiere decir determinar los números reales x para los cuales la ecuación dada **es verdadera.** A lo que se determina se le llama **soluciones** o **raíces** de la ecuación dada.

Propiedad de igualdad en la suma

Para todo los números reales a, b, c , si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Propiedad de igualdad en la multiplicación

Para todo los números reales a, b, c , si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Orden superior

Regla de Rufini para hallar las raíces

Paolo Ruffini

1765-1822

Inecuaciones

Inecuación: es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Las siguientes proposiciones son llamadas inecuaciones lineales o desigualdades,

$$ax+b>0, \quad ó \quad ax+b<0, \quad ó \quad ax+b\geq 0, \quad ó \quad ax+b\leq 0$$

Resolver una inecuación es hallar el conjunto de elementos que la satisfacen, *estos conjuntos son subconjuntos de los números reales*, hay algunos que son especialmente importantes, llamados "intervalos", los cuales nos ayudaran a conocer mejor la recta real es decir los números reales.

Dados $a \; y \; b \in R$ con $a<b$. A continuación se definen algunos de los subconjuntos de

$$[a,b] = \{x\in R : a\leq x\leq b\}$$
$$(a,b) = \{x\in R : a< x< b\}$$
$$[a,b) = \{x\in R : a\leq x< b\}$$
$$(a,b] = \{x\in R : a< x\leq b\}$$

$$[a,\infty) = \{x\in R : a\leq b\}$$
$$(-\infty,b) = \{x\in R : x< b\}$$
$$(-\infty,b] = \{x\in R : x\leq b\}$$
$$(a,\infty) = \{x\in R : a< x\}$$

$$(-\infty,\infty)=R$$

Los cuatro intervalos de la izquierda están acotados, sus extremos son a y b. El intervalo $[a,b]$ es un intervalo cerrado, (a,b) es abierto, $(a,b]$ es abierto por la izquierda y cerrado por la derecha y $[a,b)$ es cerrado por la izquierda y abierto por la derecha. Los cinco intervalos de la derecha son no acotados.

Propiedades de las inecuaciones

a) Si , $a \geq b$ y $b \geq c$ entonces $a \geq c$, propiedad transitiva en R

b) Si , $a \geq b$ entonces $a + c \geq b + c$, para todo $c \in R$

c) Si $a \geq b$ y $a.c \geq b.c$, entonces

d) Si $a \geq b$ y $c < 0$, entonces $a.c \leq b.c$

Para la resolución de inecuaciones las separaremos en dos casos

Primer Caso: Desigualdades lineales

$$ax + b > 0; \quad ax + b \geq 0; \quad ax + b < 0; \quad ax + b \leq 0$$

Para resolverlas, usamos las propiedades del orden. El objetivo es despejar la incógnita $''x''$ mediante las operaciones definidas en R . Para ello primero eliminamos los términos independientes (restando o sumando a ambos lados de la desigualdad) y luego el coeficiente de la $''x''$ (multiplicando o dividendo a ambos lados de la desigualdad)

Segundo Caso: Inecuaciones de ala forma

$$\frac{ax+b}{xc+d} > 0 \qquad \frac{ax+b}{xc+d} \geq 0 \qquad \frac{ax+b}{xc+d} < 0 \qquad \frac{ax+b}{xc+d} \leq 0 \qquad c \neq 0$$

$$\frac{ax+b}{xc+d} > 0 \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad ax+b>0 \;\wedge\; cx+d>0 \\ \vee \\ (ii) \quad ax+b<0 \;\wedge\; cx+d<0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{ax+b}{xc+d} < 0 \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad ax+b>0 \;\wedge\; cx+d<0 \\ \vee \\ (ii) \quad ax+b<0 \;\wedge\; cx+d>0 \end{array} \right\}$$

Realizar operaciones entre las soluciones de acuerdo a las operaciones conjuntistas correspondientes al " $\wedge$ " y al " $\vee$ "

$\wedge \equiv \cap \qquad \vee \equiv \cup$

Ejercicios

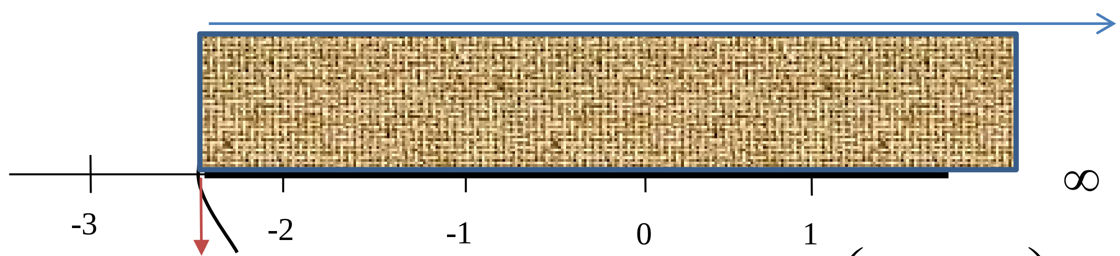
Resolver la siguiente inecuación $2x+5>0$

$$2x+5-5>0-5$$

$$2x+5-5>0-5$$

$$\frac{1}{2}(2x)>(-5)\frac{1}{2}$$

$$x>-\frac{5}{2}$$



$$-\frac{5}{2}$$

$$2x+5>0$$

$$\left(-\frac{5}{2},\infty\right)$$

Resolver la siguiente inecuación $\dfrac{3x+1}{2x-1} > 0$

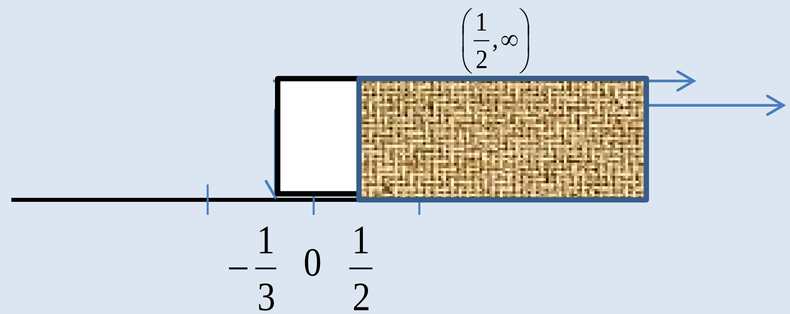
$$3x+1>0 \quad \wedge \quad 2x-1>0$$

$$3x+1-1>0-1$$

$$3x>-1$$

$$\frac{1}{3}3x>-1\frac{1}{3}$$

$$x>-\frac{1}{3}$$



$$2x-1+1>0+1$$

$$2x>1$$

$$\frac{1}{2}2x>1\frac{1}{2}$$

$$x>\frac{1}{2}$$

$$\vee$$

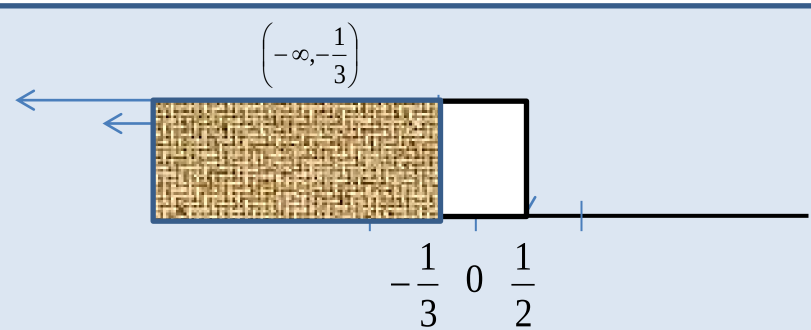
$$3x+1<0 \quad \wedge \quad 2x-1<0$$

$$3x+1-1<0-1$$

$$3x<-1$$

$$\frac{1}{3}3x<-1\frac{1}{3}$$

$$x<-\frac{1}{3}$$

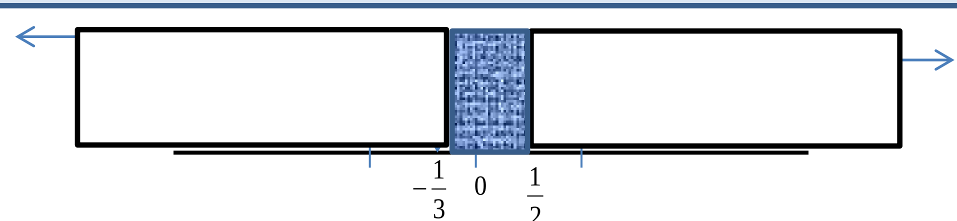


$$2x-1+1<0+1$$

$$2x<1$$

$$\frac{1}{2}2x<1\frac{1}{2}$$

$$x<\frac{1}{2}$$



$$S=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$$

Valor absoluto.

Si a y b son números reales tales que $a \leq b$, entonces se considera como distancia entre a y b el numero no negativo $b - a$ (fig. 1)

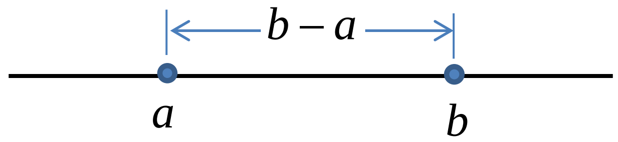


Figura 1

La distancia entre -1 y 4 viene dada por $4-(-1)=5$ (Fig. 2)

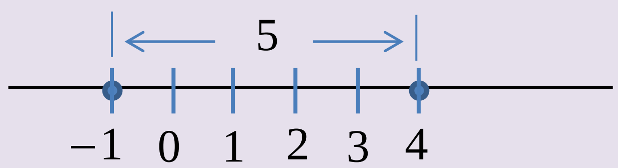


Figura 2

La distancia entre -5 y -2 viene dada por $-2-(-5)=3$ (Fig. 3)

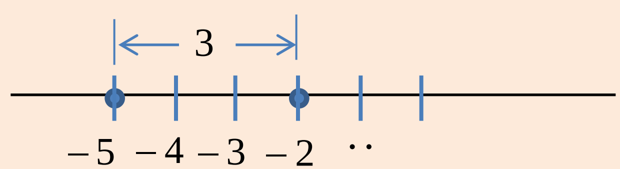
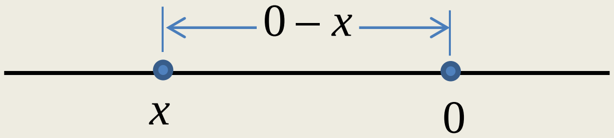


Figura 3

Distancia entre 0 y un numero real cualquiera x

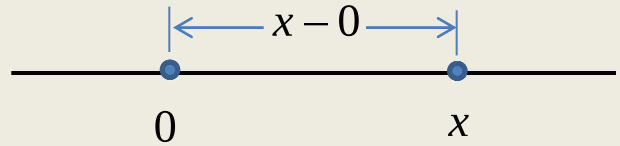
$x < 0$



$|x| = 0 - x = -x$

Figura 4a

$x > 0$



$|x| = x - 0 = x$

Figura 4b

Si $x = 0$

$|x| = 0 - 0 = 0$

Definición de valor absoluto

Si x es un numero real, el valor absoluto de x, representado por $|x|$, se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Inecuaciones con valor absoluto

Son proposiciones del tipo

$$|ax+b| \geq c \quad |ax+b| \leq c \quad a,b,c \in R, \quad c \geq 0.$$

Nuevamente, resolverla significa hallar todos los números reales que la satisfacen. Para ello debemos despejar $''x''$ **haciendo uso de las propiedades del valor absoluto y de las operaciones definidas en** R **.**

Propiedades del valor absoluto en igualdades.

Teorema 1

Dados dos números reales x e y , $|x-y|$ representa la distancia entre x e y

Demostración. El axioma de tricotomía indica que existen tres posibles situaciones

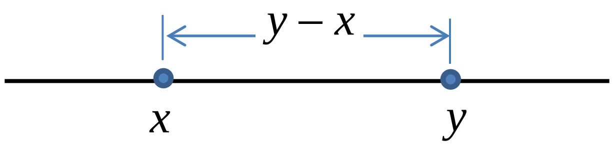
$$x<y \qquad x>y \qquad x=y$$

Caso 1. Si $x<y$

$$y-x>0$$

De modo que, por la definición de valor absoluto

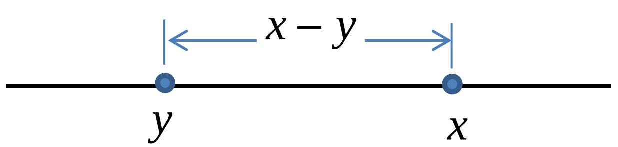
$$|(x-y)|=-(x-y)=y-x$$ Es la distancia entre x , y



Caso 2. Si $x>y$

entonces $x-y>0$ De modo que, por la definición de valor absoluto

$$|(x-y)|=x-y$$ Es la distancia entre x , y



Caso 3. Si $x=y$, $|x-y|=|0|=0$ que es, claramente, la distancia entre x ϵ y

Teorema 2

$|x| \geq 0$ Para todo numero real x

Demostración

Utilizando la definición de valor absoluto, si $x \geq 0, |x| = x \geq 0$ y si $|x| = -x > 0$

Demostración

Teorema 3

$|-x| = |x|$ Para todo numero real x

Si $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$, de modo que

$$|x| = x \quad \text{y} \quad |-x| = -(-x) = x$$

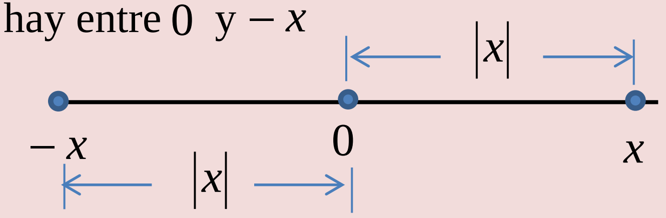
Por otra parte, si $x < 0$, entonces $-x > 0$ de modo que

$$|x| = -x \quad \text{y} \quad |-x| = -x$$

en cualquier caso $|x| = |-x|$

Interpretación geométrica

$|-x| = |x|$ Indica que la distancia que hay entre 0 y x es igual a la que hay entre 0 y $-x$



Teorema 4

$|x|^2 = x^2$ Para todo numero real x

Demostración

$x \geq 0,\ |x| = x$ Así que $|x|^2 = (x)^2$. Para $x < 0,\ |x| = -x$, así $|\mathrm{x}^2| = (\mathrm{x})^2 = x^2$

Por consiguiente para todos los valores positivos de x , $|x|^2 = x^2$

Propiedades del valor absoluto en desigualdades.

Teorema 1

$|x| < a$, entonces $-a < x < a$, en donde $a > 0$; esto es

$$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\} = (-a, a)$$

Demostración

Si $|x| < a$ entonces $-a < -|x|$. Por la definición de valor absoluto

$|x| = x$ o $|x| = -x$

De modo

$-a < -|x| \leq x \leq |x| < a$ de modo que por propiedad transitiva de las desigualdades $-a < x < a$

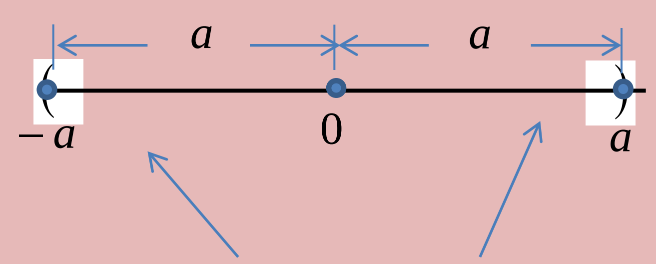
y

$$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\} = (-a, a)$$

Interpretación geométrica. Si $|x| < a$ simplemente quiere decir que la distancia entre 0 y x es menor que a unidades,

Es decir, x dista de 0 menos que a

Usando la notación de intervalo $x \in (-a, a)$.



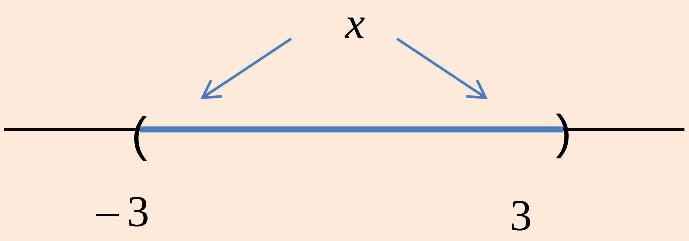
x está en este intervalo

Ejercicios

Resolver la siguiente inecuación $|x| < 3$

Por el teorema 1,

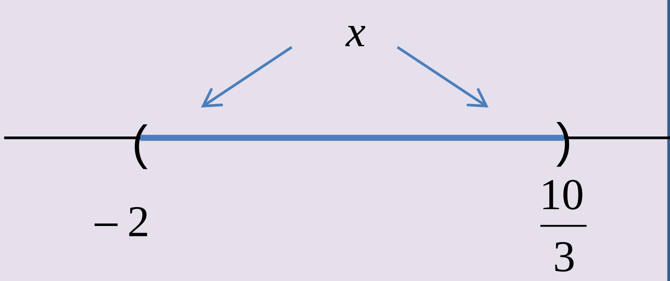
$$\{x \mid |x| < 3\} = \{x \mid -3 < x < 3\} = (-3,3)$$



Resolver la siguiente inecuación $|3x-2| < 8$

Por el teorema 1,

$$\begin{aligned} \{x \mid |3x-2| < 8\} &= \{x \mid -8 < 3x-2 < 8\} \\ &= \{x \mid -6 < 3x < 10\} \\ &= \left\{x \mid -2 < x < \frac{10}{3}\right\} \\ &= \left(-2, \frac{10}{3}\right) \end{aligned}$$



Teorema 2

$|x| > a$, entonces $x < -a$, o $x > a$, cuando $a > 0$; esto es

$$\{x \ \| x| > a\} = \{x \ | -x < -a\} \cup \{x| \ x > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$$

Demostración

Por la definición de valor absoluto, $|x| = x$ o $|x| = -x$. Por lo tanto

$$|x| = x > a \quad \text{o} \quad |x| = -x > a$$

Esto es

$$x > a \quad \text{o} \quad -x > a$$

Pero $-x > a$ implica $x < -a$, por lo tanto

$$x > a \quad \text{o} \quad x < -a$$

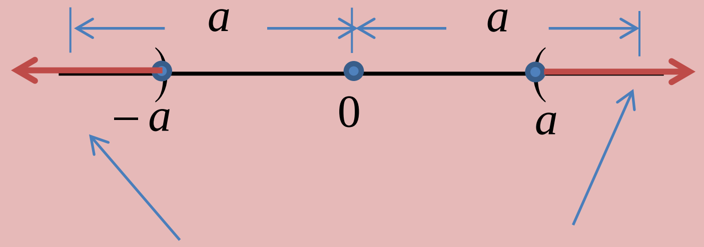
y

$$\{x| \ |x| > a\} = \{x \ | x < -a\} \cup \{x \ | x > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$$

Interpretación geométrica. Si $|x| > a$ simplemente quiere decir que la distancia entre 0 y x es mayor que a unidades,

O lo que es equivalente, que x dista de 0 mas que a

Usando la notación de intervalo

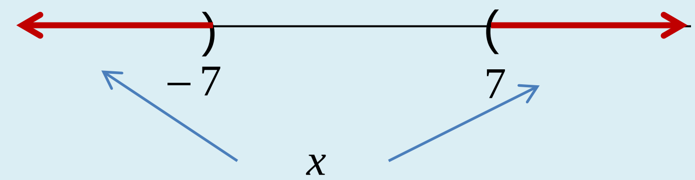


x en cualquier intervalo es mayor que a unidades desde 0

Resolver la siguiente inecuación $|x| > 7$

Por el teorema 2,

$$\{x \,|\, |x| > 7\} = \{x \,|\, x < -7\} \cup \{x \,|\, x > 7|\} = (-\infty, -7) \cup (7, \infty)$$

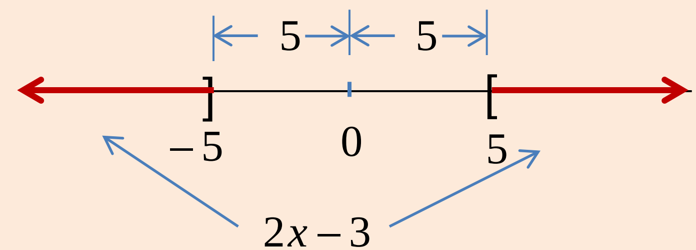


Resolver la siguiente inecuación $|2x-3| \geq 5.$

$|2x-3| \geq 5.$ Sugiere que

$2x - 3 \leq -5$

$2x - 3 \geq 5$



De modo que

$2x \leq -5 + 3$

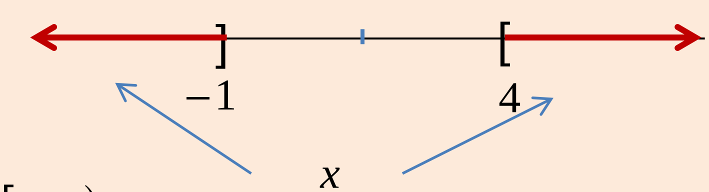
$2x \leq -2$

$x \leq -1$

$2x \geq 5 + 3$

$2x \geq 8$

$x \geq 4$



Por lo tanto $\{x|5\} = \{x \,|\, x \leq -1\} \cup \{x|x \geq 4\} = (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$

Teorema 3. **Desigualdad triangular**

Si a y b son números reales, entonces $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Demostración

Se tiene que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. Sumando desigualdades, se obtiene

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq (|a|+|b|.)$$

Ahora bien, si $a+b \geq 0$

$$|a+b| = a+b \leq |a|+|b|$$

Mientras que si, $a+b<0$

$$|a+b| = -(a+b)$$

De modo que, multiplicando cada miembro de la desigualdad

$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq (|a|+|b|.)$ por -1, se obtiene

$$|a+b| = (a+b) \leq |a|+|b|$$

En cualquier caso

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

Ejercicios varios

$$\left|\frac{5x-3}{-2}\right| > 8$$

$$\left|\frac{5x-3}{-2}\right| > 8 \Leftrightarrow \frac{|5x-3|}{2} > 8 \qquad \Leftrightarrow |5x-3| > 16$$

$$5x-3 < -16$$

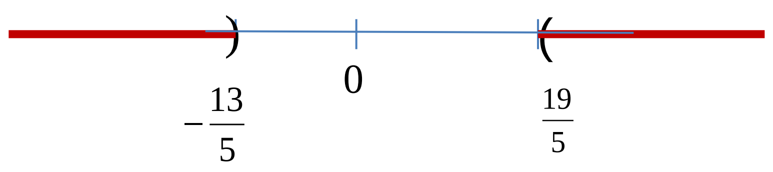
$$5x < -13$$

$$x < -\frac{13}{5}$$

$$5x-3 > 16$$

$$5x > 19$$

$$x > \frac{19}{5}$$



$$x \in \left(-\infty, -\frac{13}{5}\right) \cup \left(\frac{19}{5}, \infty\right)$$

Resolver $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4$

Realizar operaciones entre las soluciones de acuerdo a las operaciones conjuntistas correspondientes al " $\wedge$ " y al " $\vee$ "

$\wedge \equiv \cap \qquad \vee \equiv \cup$

Aplicamos el teorema 1

$$\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4 \Leftrightarrow -4 < \frac{x+2}{2x-3} < 4$$

Resolviendo $\dfrac{x+2}{2x-3} > -4$ (1) $\qquad \dfrac{x+2}{2x-3} < 4$ (2)

$$\frac{x+2}{2x-3} + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{9x-10}{2x-3} > 0$$

$$9x-10 > 0 \Rightarrow x > \frac{10}{9}$$
$$\wedge$$
$$2x-3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$
$$x \in \left(\frac{10}{9}, \infty\right) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

$$\vee$$

$$9x-10 < 0 \Rightarrow x < \frac{10}{9}$$
$$\wedge$$
$$2x-3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$
$$x \in \left(-\infty, \frac{10}{9}\right) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{10}{9}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

$$\frac{x+2}{2x-3}-4<0 \Leftrightarrow \frac{-7x+14}{2x-3}<0$$

$$-7x+14>0 \Rightarrow -7x>-14 \Rightarrow x<2$$

$$\wedge$$

$$2x-3<0 \Rightarrow x<\frac{3}{2}$$

$$x \in (-\infty,2) \cap \left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$$

$$x \in \left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$$

$$\vee$$

$$-7x+14<0 \Rightarrow -7x<-14 \Rightarrow x>2$$

$$\wedge$$

$$2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$$

$$x \in (2,\infty) \cap \left(\frac{3}{2},\infty\right)$$

$$x \in (2,\infty)$$

$$x \in \left(-\infty,\frac{3}{2}\right) \cup (2,\infty)$$

$$x \in \left(-\infty,\frac{10}{9}\right) \cup \left(\frac{3}{2},\infty\right) \cap \; x \in \left(-\infty,\frac{3}{2}\right) \cup (2,\infty)$$

$$\boxed{x \in \left(-\infty,\frac{10}{9}\right) \cup (2,\infty)}$$

Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación, que puede ser expresada en la forma $ax^2+bx+c>0$, o bien la forma $ax^2+bx+c<0$
Es una desigualdad o inecuación cuadrática.

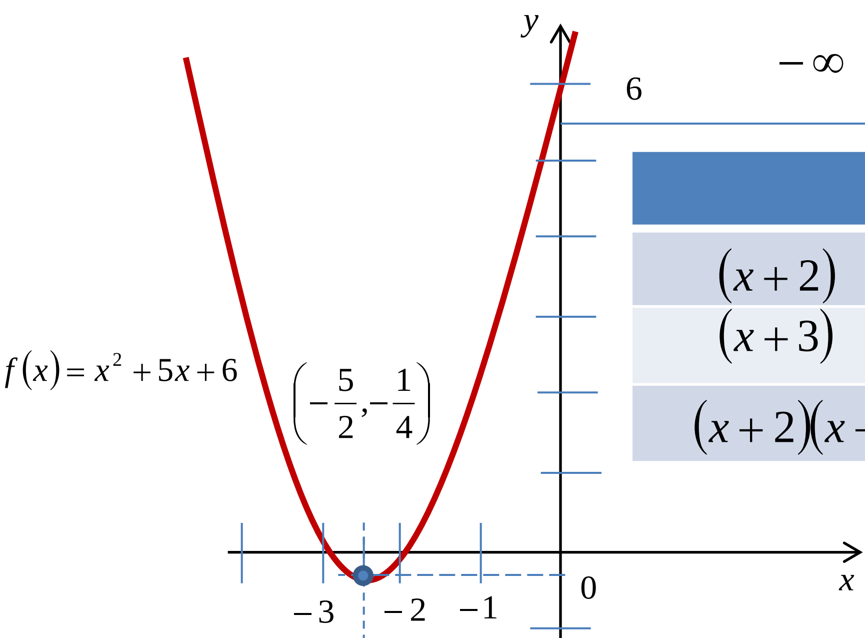
Las graficas de las funciones cuadráticas se utilizan para resolver las inecuaciones cuadráticas.

Considere la grafica de la función cuadrática $y = f(x) = x^2+5x+6$ que se muestra en la figura. Obsérvese Que la grafica de la función tiene como intercepción con el eje x los puntos $(-3,0)$ y $(-2,0)$. Nótese También que si $x<-3$ o si $x<-2$, entonces $f(x)>0$; si $-3<x<-2$, entonces $f(x)<0$. De aquí que

$$\{x|\ f(x)=x^2+5x+6>0\}=\{x|\ x>-3\}\cup\{x|\ x>-2\}=(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$$

y

$$\{x|\ f(x)=x^2+5x+6<0\}=\{x|\ -3<x<-2\}=(-3,-2)$$



	$-\infty$ a -3	-3 a -2	-2 a ∞
$(x+2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
$(x+2)(x+3)$	$+$	$-$	$+$

$(x+2)(x-3)<0$ $\qquad -\infty \qquad\qquad -2 \qquad\qquad 3 \qquad\qquad \infty$

$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Los signos correspondientes al producto, se obtienen usando los signos de los factores y la ley de signos para la multiplicación definida de R $\quad (-2,3)$

$x(-x-7)(-5x-2)<0$

Por encima de su raíz, el signo es positivo y por debajo es negativo, si no hay reflexión

Por encima de su raíz, el signo es negativo y por debajo es positivo, si hay reflexión

$-\infty \qquad\qquad -7 \qquad\qquad -2/5 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad \infty$

x	$-$	$-$	$-$	$+$
$(-x-7)$	$+$	$-$	$-$	$-$
$(-5x-2)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x(-x-7)(-5x-2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$(-\infty,-7)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)$$