Definiciones intuitivas de relaciones y funciones

RELACIONES

Las frases

- ✓**Juan es esposo de María**.
- ✓**Caín es hermano de Abel**
- ✓**Maracaibo es mas grande que Mérida**
- ✓**Cinco es menor que ocho**

Llevan implícito lo que comúnmente se entiende por relación

Expresiones del tipo

Es esposo de
Es hermano de
Es mas grande que
Es menor que

*Una relación sugiere una **correspondencia o una asociación** entre los elementos de dos conjuntos*

FUNCIONES

En la vida diaria, de manera implícita nos refreímos a funciones al hablar de

- **La cantidad de impuesto que pagamos el 31 de marzo de cada año es función de nuestros ingresos;**
- **El número de textos de matemáticas que se necesitan para el curso, es una función del numero de estudiantes;**
- **El numero de diputados de cada estado es función de su población**

Intuitivamente una función sugiere un cierto tipo de correspondencia.

Hay una correspondencia entre numeros

Relaciones y Funciones

***Definición de Relación*:**

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales, “se denomina relación al conjunto de pares ordenados que se generan de asociar elementos del conjunto X con elementos del conjunto Y”. El conjunto X se llama conjunto de partida o **dominio** de la relación y el conjunto Y se denomina conjunto de llegada o **rango** de la relación.

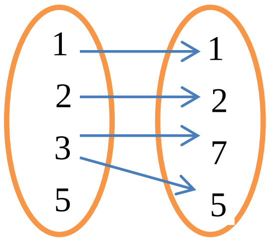
***Definición de Función*:**

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales “una *función* de X hacia Y es una regla o una correspondencia que asocia a cada elemento de x de X con un único un elemento de y de Y.

Todas las funciones son relaciones; sin embargo, no todas las relaciones son funciones

Ejemplo 1

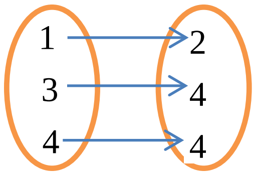
$\{(1,1),(2,2),(3,7),(3,5)\}$ Es una relación con **dominio** $\{1,2,3\}$ **recorrido** $\{1,2,7,5\}$



No es una función porque $(3,7)$ y $(3,5)$ tienen igual el primer elemento

Ejemplo 2

$\{(1,2),(3,4),(4,4)\}$ Es una relación, que es una función con **dominio** $\{1,3,4\}$ **recorrido** $\{2,4\}$

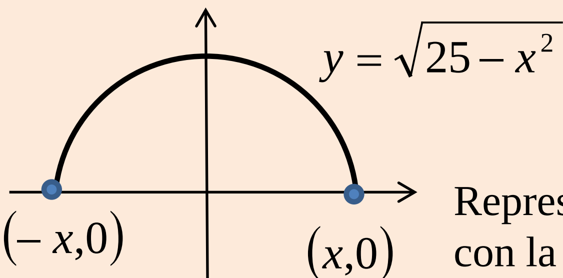


Hay dos pares que tienen el segundo elemento igual; **esto no contradice** la definición de función.

Por lo tanto, si tan solo dos pares ordenados diferentes tienen el mismo primer elemento, la relación ya no es función. Con otras palabras, si un elemento del dominio aparece con mas de un elemento del recorrido, la relación no es una función

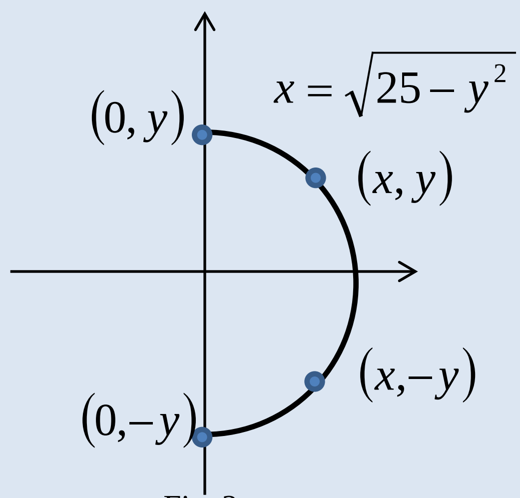
Geométricamente, esto quiere decir que si la grafica de una relación tiene mas de un punto con la misma abscisa, la relación no es una función.

Consideremos las graficas de las relaciones en las figuras 1a y 1b. $\left\{(x, y) \middle|\ y = \sqrt{25 - x^2}\right\}$



Representa una función, puesto que la grafica no tiene dos puntos diferentes con la misma abscisa

Fig. 1

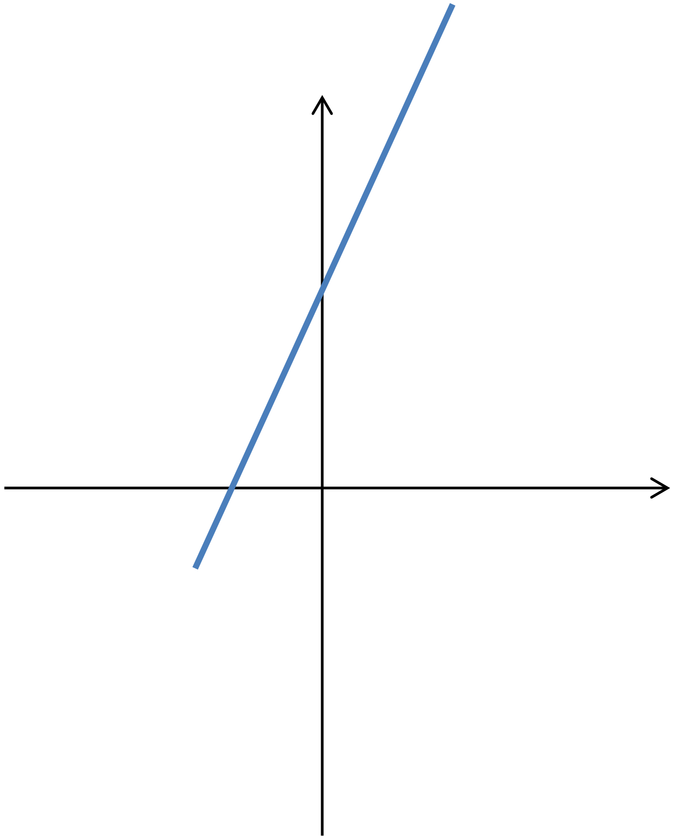


No es una función, ya que hay dos puntos diferentes con la misma abscisa x

Fig. 2

$$f(x) = 2x + 3$$

Conjunto X	Conjunto Y	Desarrollo
− 2	− 1	f(−2) = 2(−2) + 3 = −4 + 3 = − 1
− 1	1	f(−1) = 2(−1) + 3 = −2 + 3 = 1
0	3	f(0) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3
1	5	f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5
2	7	f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7
3	9	f(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9
4	11	f(4) = 2(4) + 3 = 8 + 3 = 11



DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

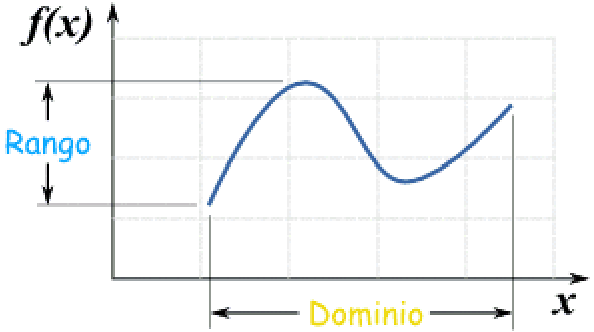
Dada una función $y = f(x)$. Se llama dominio de f al conjunto de valores que toma la variable independiente x, se indica como $Dom\,f$. El dominio está formado por los valores de x para los que existe la función, es decir, para los que hay un $f(x)$. El recorrido es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y, esto es el conjunto de las imágenes se representa como $ima\,f$

El *dominio* de la función, se define entonces

$$Dom(f) = \{\, x \in X \;/\; f(x) \text{ esté definida } \}$$

El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio se llama ***rango*** de la función y se define

$$rang(f) = \{\, y \in Y \;/\; y = f(x), x \in X \,\}$$



En las aplicaciones, es frecuente que una gráfica muestre con mayor claridad la relación que existe entre las variables de una función. Las ecuaciones y tablas que corresponden a una función, por lo general, requieren algunos cálculos e interpretaciones, antes de poder ver con claridad todo tipo de información contenidas en ellas.

Cuando la regla que define una función *f* está dada mediante una ecuación que relaciona las variables *x* e *y*, la *gráfica de f*, es la *gráfica de la ecuación*, es decir, el conjunto de puntos (*x*, *y*) del plano cartesiano que satisfacen la ecuación. Más precisamente,

Definición: Sea $f : X \subset R \to Y \subset R$, una función real de variable real. *La gráfica de* f es el conjunto de puntos, $(x, y) \in R^2$, tales que la pareja ordenada (x, y) cumplen que $f(x) = y$ la gráfica de la función se define:

$$graf\left(f\right) = \left\{\left(x, y\right) \in R^2 \,/\, y = f(x),\, x \in Dom\left(f\right)\right\}$$

Crecimiento y decrecimiento de las funciones

Una función f se dice que es (**estrictamente**) creciente en un inérvalo I, si para cualquier par de números a y b del intervalo I, tales que $a < b$, se tiene $f(a) < f(b)$ (fig. 1).

Una función f es (estrictamente) decreciente en un intervalo I, si para cualquier par de números a y b, del intervalo I, con $a < b$, se tiene $f(a) > f(b)$

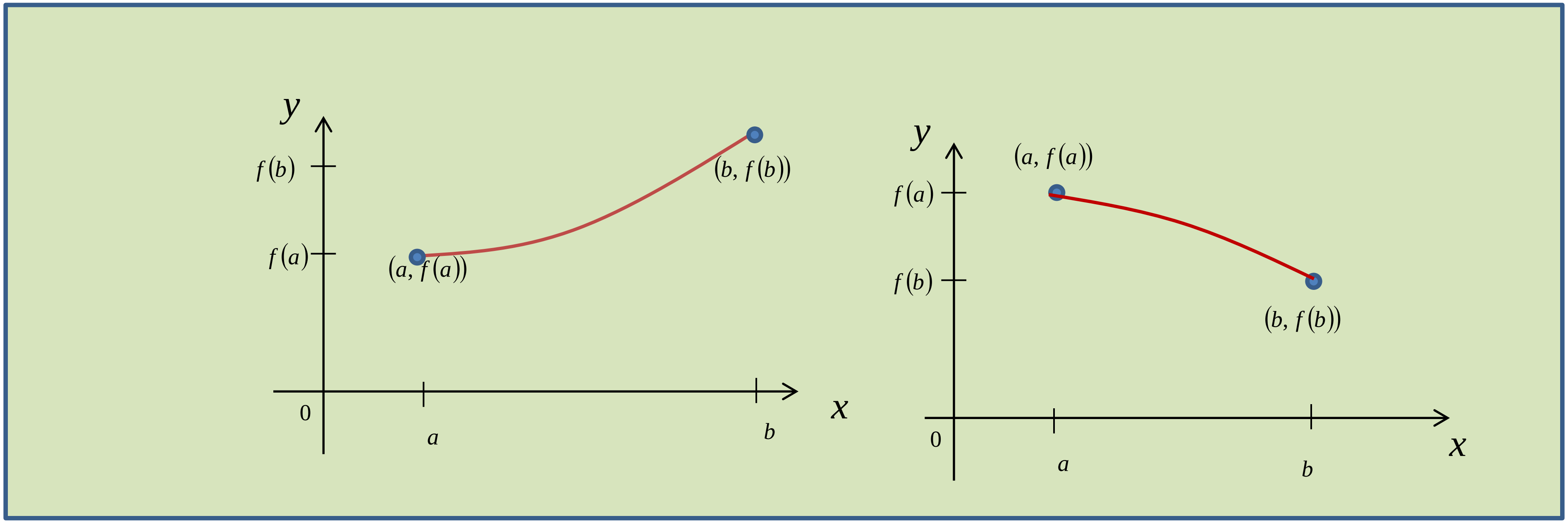
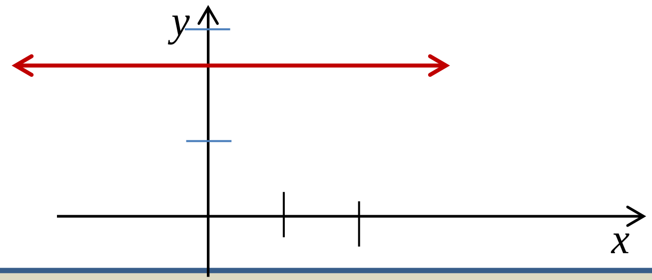


Fig. 1

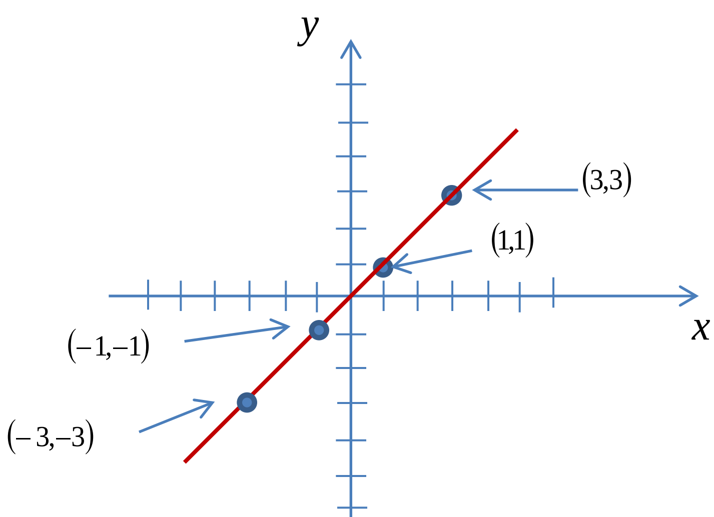
Función constante $f(x) = b$ b Es un número real

Una función constante es una función lineal especial con . **Su dominio es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto que consiste de sólo un número** . Su gráfica corresponde a una recta paralela al eje x cuyo intercepto es



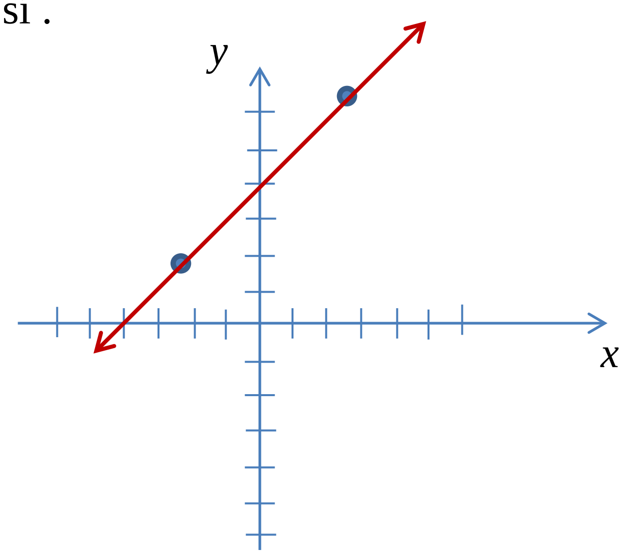
Función identidad $f(x) = x$

La función identidad es también una función lineal. **Su dominio y su rango son el conjunto de todos los números reales**. Su gráfica es una línea cuya pendiente es (1) y cuyo intercepto con y es 0. La línea consiste en todos los puntos para los cuáles la coordenada es igual a la coordenada , su gráfica corresponde a una recta que pasa por el origen formando un ángulo de 45º con el semieje positivo x.



Función lineal $f(x) = mx + b$ m y b son números reales

El dominio de la función lineal consiste en todos los números reales. La gráfica de esta función consiste en una línea recta con pendiente e intercepto b con el eje y. Una función lineal es creciente si , decreciente si y constante sí .



El conocimiento de la simetría permite a menudo simplificar la construcción de la grafica de las funciones

Simetría

Una grafica es simétrica al eje y si, para cualquier (x, y) de la grafica $(-x, y)$ también es de la grafica

La grafica de una función f es simétrica al origen si, cualquiera que sea el punto (x, y) de la grafica de f, el punto $(-x, -y)$ también esta sobre la grafica f .

Paridad

Una función f que tenga la propiedad de que $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f ,se llama **función par**

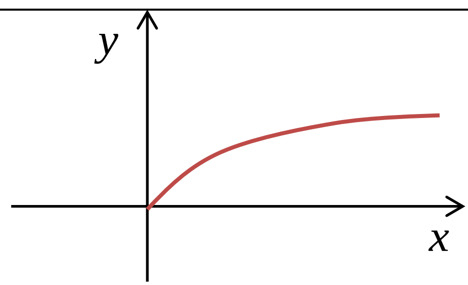
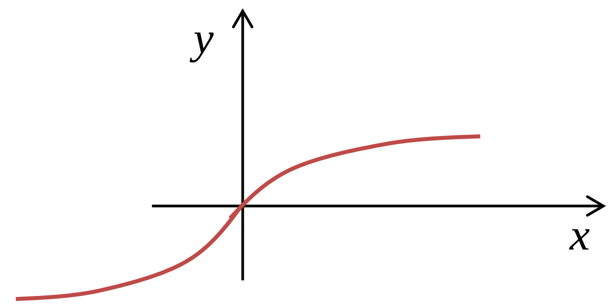
Una función f que tenga la propiedad de que $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f ,se llama **función impar**

Funciones ni pares ni impares

Asimétricas

Potencias radicales $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

La función radical está definida como una función potencia con exponente racional, así , $f(x) = x^{m}$ donde es m un número de la forma $m = \dfrac{p}{q}$, con $q \neq 0$, su representación gráfica es:

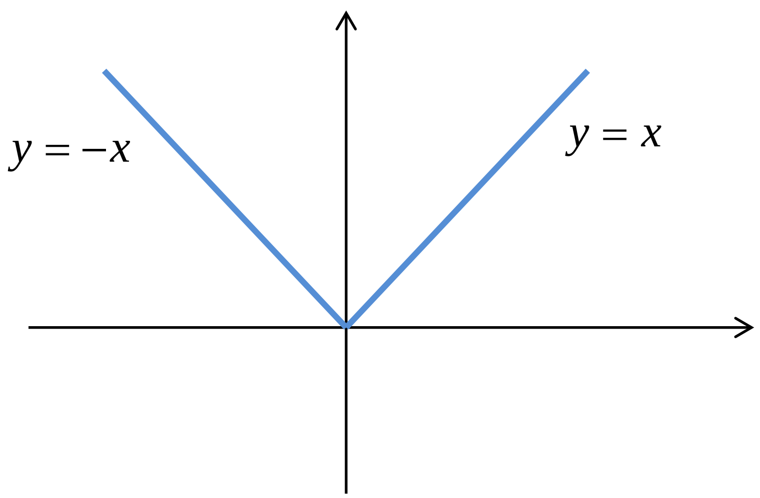
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n par	$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n impar
	

valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, \; si \quad x \geq 0 \\ -x, \; si \quad x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función valor absoluto es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de los números reales no negativos. La función valor absoluto es una función por partes, y su gráfica está formada por porciones de las rectas perpendiculares definidas y.

Como $|x| = |-x|$, se sigue que $f(x) = f(-x)$; esto es f es una función par y su grafica es simétrica respecto al eje y.



Función parte entera

$f(x) = [\![x]\!]$

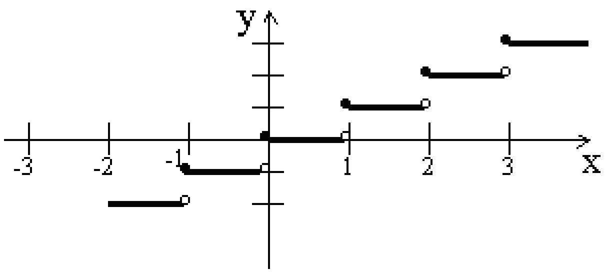
La función parte entera o función escalón tiene dominio real y rango entero, así $f : R \to Z$, se representa , , $f(x) = [\![x]\!] = n$ donde n es un número entero; y se define el "mayor entero que no supera a x , La expresión se lee parte entera de $n \le x < n+1$.

La expresión $[\![x]\!]$ se lee parte entera de x.

Ejemplo

$[\![2]\!] = 2,\quad [\![\sqrt{3}]\!] = 1,\quad [\![-1{,}7]\!] = -2,\quad [\![-4{,}1]\!] = -5$

La gráfica de la función parte entera está constituida por una serie de segmentos unitarios faltándole a cada uno su extremo derecho.



Funciones cuadráticas

Una función cuadrática es una función polinómica de grado 2. Por lo tanto, $y = f(x)$ es una función cuadrática, la forma general de f viene dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$. Una Función cuadrática puede ser también considerada en forma de conjunto como $\{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in R\}$

Ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación que pueda expresarse de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$, Se denomina ecuación de segundo grado en x.

El conjunto solución o simplemente la solución de una ecuación de segundo grado, es el conjunto de todas las raíces posibles.

Resolución por el método del factor

$$Si\ \ ab = 0,\ \text{entones}\ a = 0\ \text{ó}\ b = 0$$

Resolución por el método de completar cuadrados

Para completar el cuadrado en expresiones cuadráticas como $ax^2 + bx$ se suma el cuadrado de la mitad de b que es el coeficiente de x, así $\left(\frac{b}{2}\right)^2$: entonces tenemos :

$$ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Funciones cuadráticas

Teorema (formula cuadrática).

Si $ax^2 + bx + c$; a, b y c, números reales $a \neq 0$ entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Son las raíces de la ecuación .

$$a \neq 0$$

Demostración

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad ax^2 + bx = -c \qquad x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \qquad x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{-c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

De donde obtenemos

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ó

$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Teorema

La función cuadrática $y = ax^2 + bx + c = 0$ tiene un punto extremo en $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. Si $a > 0$,

El punto extremo es un punto mínimo y la parábola se abre hacia arriba. Si $a < 0$, el punto extremo es un Punto máximo y la palabra se abre hacia abajo.

Demostración: Sacando a como factor de los dos términos en x, la ecuación $y = ax^2 + bx + c = 0$ toma la forma

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right) + c$$

Completando ahora el cuadrado de la expresión

$$x^2 + \frac{b}{2a}x$$

obtenemos

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2} \qquad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2}$$

Sí $a > 0$, entonces $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, ya que $y = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, de aquí que

$$y = \left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right] + c - \frac{b^2}{4a} \geq c - \frac{b^2}{4a} \qquad (1)$$

Entonces y es siempre mayor o igual que $c - \frac{b^2}{4a}$ si $a > 0$.

Análogamente, si $a < 0$ $\quad y \leq c - \frac{b^2}{4a}$ (2)

Entonces y es siempre mayor o igual que $c - \frac{b^2}{4a}$ si $a < 0$

Por otra parte, si se sustituye $x = -\frac{b^2}{4a}$ en la función cuadrática dada $y = ax^2 + bx + c$, se tiene

$y = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = c - \frac{b^2}{4a}$ que coincide con los miembros de (1) y (2). En consecuencia, si

$a > 0$ $\quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$ es el valor mínimo de y ; la grafica de f, una parábola abierta hacia arriba tal como muestra la figura 1, y su recorrido es $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty\right)$.

Si $a < 0$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es el Máximo valor de y ; la grafica f , una parábola abierta hacia abajo tal como se indica en la figura 2, y su recorrido $\left(-\infty . f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

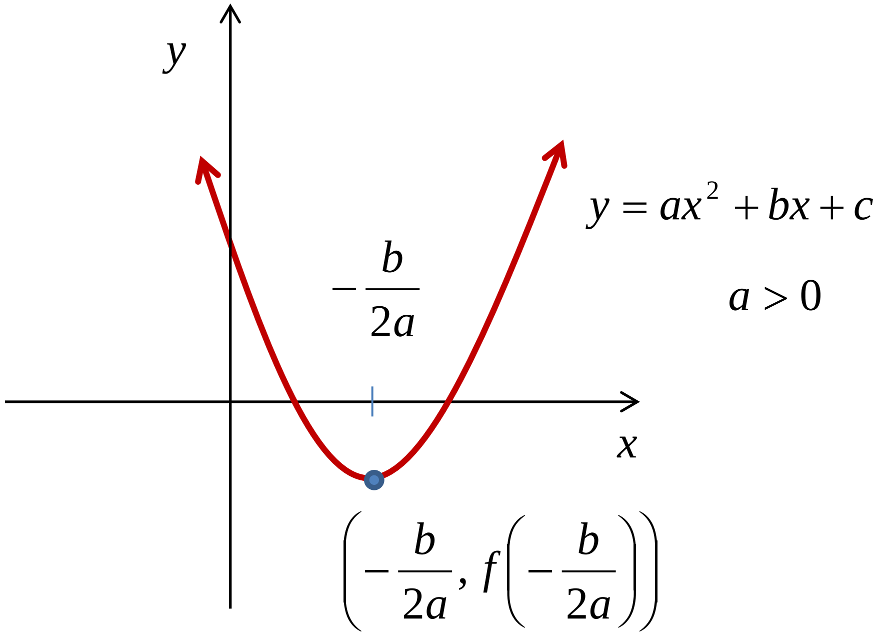


Figura 1. Parábola $a > 0$

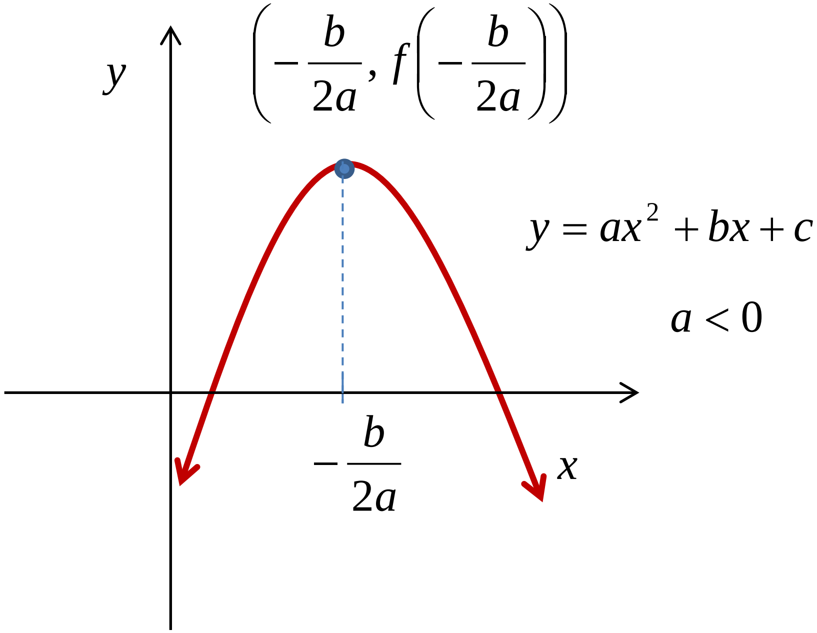


Figura 2. Parábola $a < 0$

El ^{14}C decae de forma exponencial, es decir, la tasa de decaimiento disminuye de forma proporcional al número de átomos restante.

La ecuación diferencial tiene la forma:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

cuya solución es:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

,donde:

N_0 = número de átomos de ^{14}C en el momento $t = 0$, o sea el momento inicial en el que se empieza a contar el número de desintegraciones,

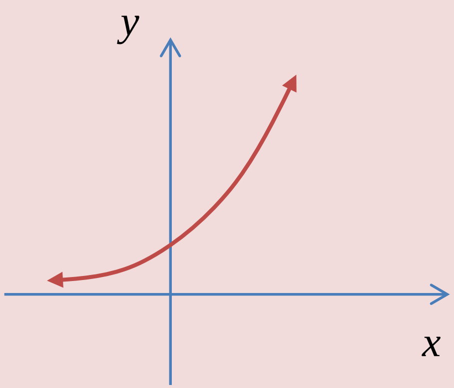
N = número de átomos restante después de que haya transcurrido un tiempo ,

λ = constante de desintegración radiactiva, la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo.

Funciones exponenciales $f(x) = b^x$

Si b es un número real positivo y $b \neq 1$. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales. Se excluye la base $b = 1$ porque esta función es simplemente la función constante $f(x) = 1^x = 1$ Se necesita también excluir bases negativas, pues de otra manera se tendría que excluir muchos valores de del dominio, tales como $x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{4},\ etc.$

$f(x) = b^x \quad b > 1$

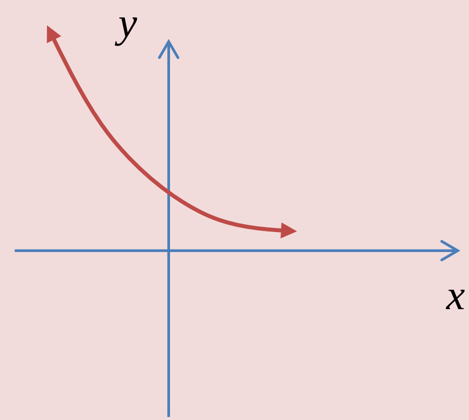


$Dom(f) = R$

$rgo(f) = (0, +\infty)$

$rgo(f) = R^+$

$f(x) = b^x \quad 0 < b < 1$

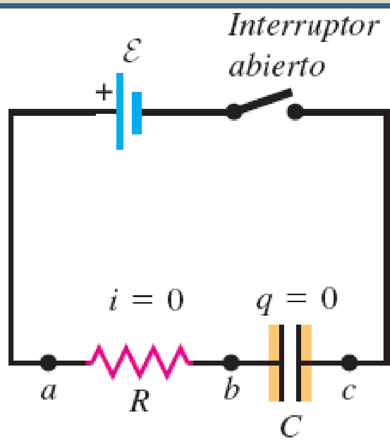


Propiedades de los exponenciales

a) $(b^r)^s = b^{r.s}$ b) $b^0 = 1$ c) $b^r b^s = b^{r+s}$

a) $b^{-r} = \dfrac{1}{b^r}$ b) $\dfrac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$ c) $a^r b^r = (ab)^r$

Carga y descarga de un condensador

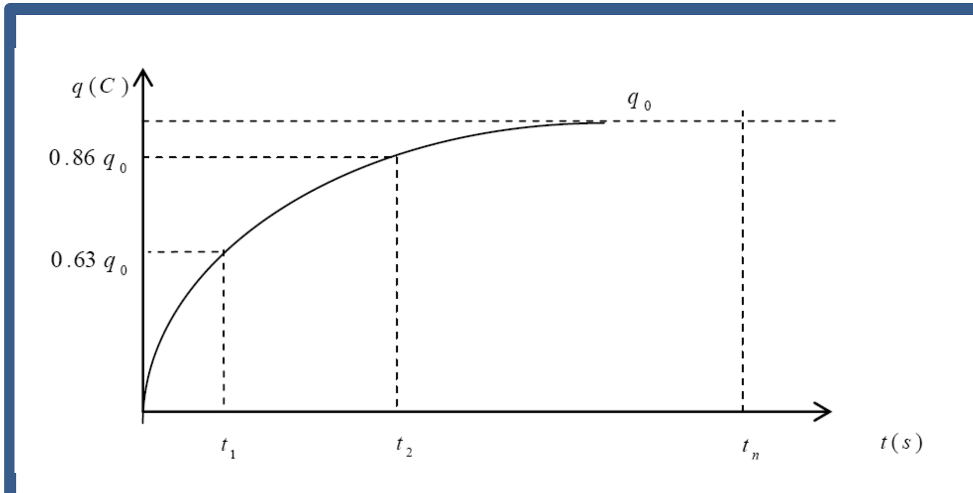


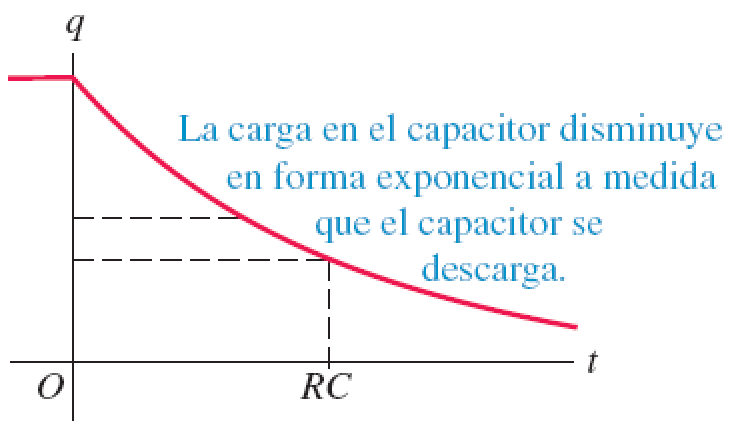
Carga

$$q = q_0\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \qquad i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Descarga

$$q = q_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad i = -i_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

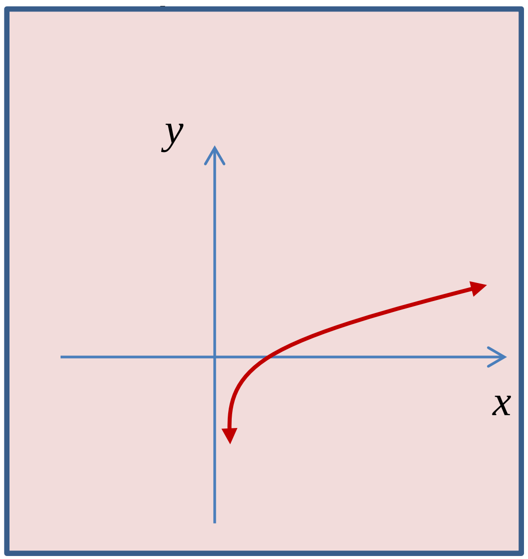




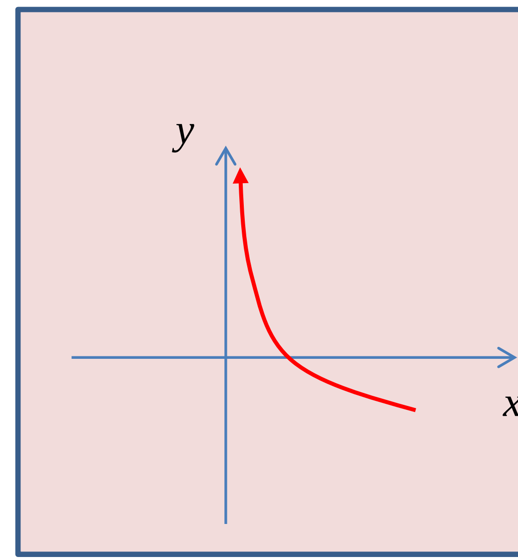
Funciones logarítmicas $f(x) = \log_b x$

La función $f^{-1}(x) = \log_b x$, función logarítmica de base b, es la función inversa de la función exponencial $f(x) = b^x$, en donde $b \neq 1$

$f(x) = \log_b x$



$f(x) = \log_b x \quad 0 < b < 1$



$$Dom(f) = R^+$$

$$rgo(f) = R$$

$3 = \log_2 8$ es equivalente a $8 = 2^3$

$x = \log_3 64$ es equivalente a $64 = 3^x$

Propiedades de los Logaritmos

Si N *y* M *son positivos* $b > 0$ *y* $b \neq 1$ *, entonces*

$$\log_b M.N = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

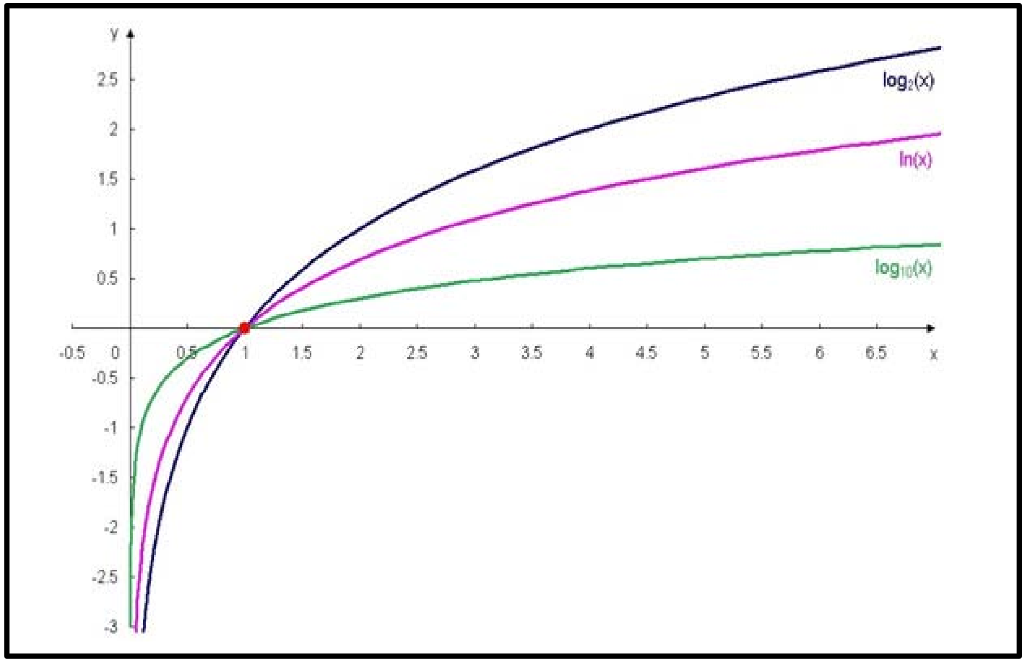
$$\log_b (M)^k = k \log_b M$$

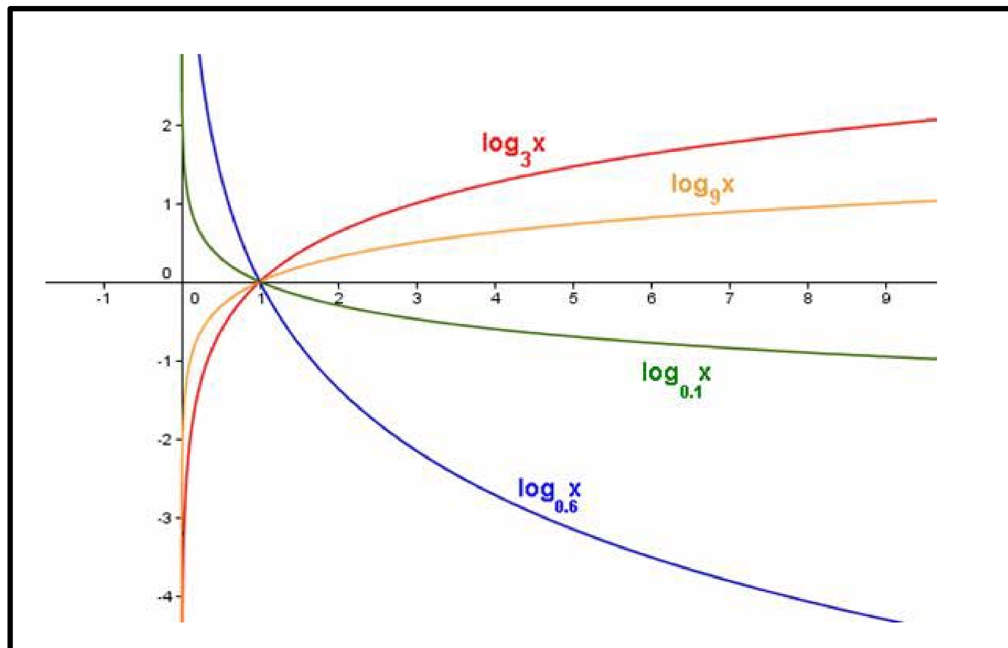
PH de una solución

El **pH** es una medida de acidez o alcalinidad de una disolución. El pH indica la concentración de iones hidronio $[H_3O]^+$ presentes en determinadas disoluciones.

$$PH = -\log_{10}\left[H^+\right]$$

Dependiendo del pH del suelo, la hortensia (*Hydrangea*) puede poseer flores rosas o azules.
En suelos ácidos (pH < 7) las flores son azules; en suelos básicos (pH > 7) son rosas.


log2(x)
ln(x)
log10(x)
y
x


log3x
log9x
log0.1x
log0.6x

Funciones definidas por intervalos o tramos (por partes).

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ si \ x \in Dom_1 \\ f_2(x), \ si \ x \in Dom_2 \\ \quad\quad\vdots \\ \quad\quad\vdots \end{cases}$$

La función por partes está definida por varias funciones en su dominio, donde su dominio viene dado por $Domf = Dom_1 \cup Dom_2 \cup \cdots$

Sea la siguiente función

$$f(x) \begin{cases} -x+1 & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & si \quad x = 2 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Encontrar $f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ b) Determinar dominio de f c) Graficar f d) Determinar el rango

a) Encontrar $f(0)$ $f(1)$ $f(2)$

$f(x) = -x+1 \quad \Rightarrow f(0) = -(0)+1 = 1$

$f(x) = 2 \quad \Rightarrow f(1) = 2$

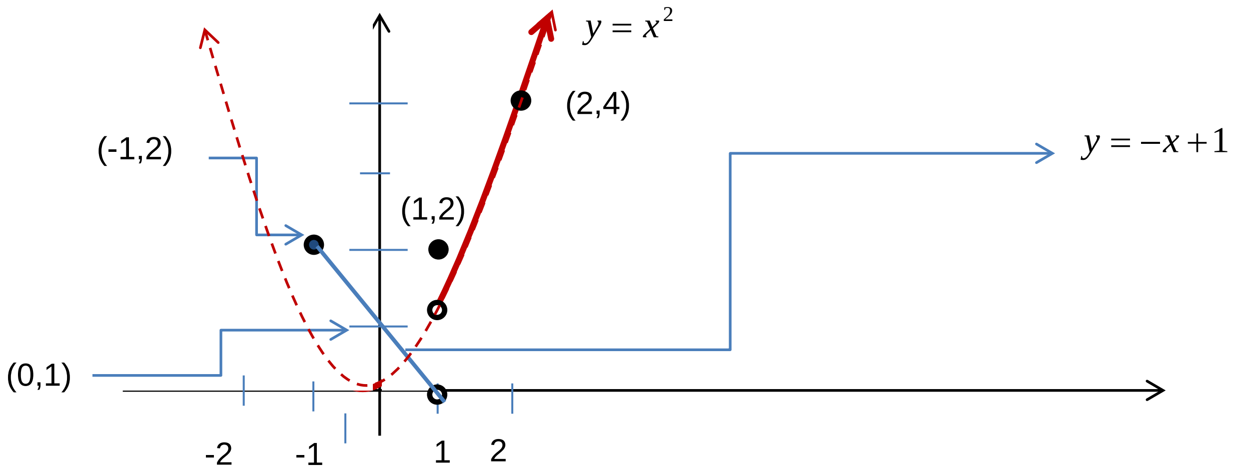
$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow f(2) = 2^2 = 4$

b) Determinar dominio de f

$\{x \ |x \geq -1\}$, o $[-1, \infty)$

c) Graficar f

Para graficar f , se grafica cada tramo



d) Determinar el rango

De la grafica se puede observar que el rango de f es

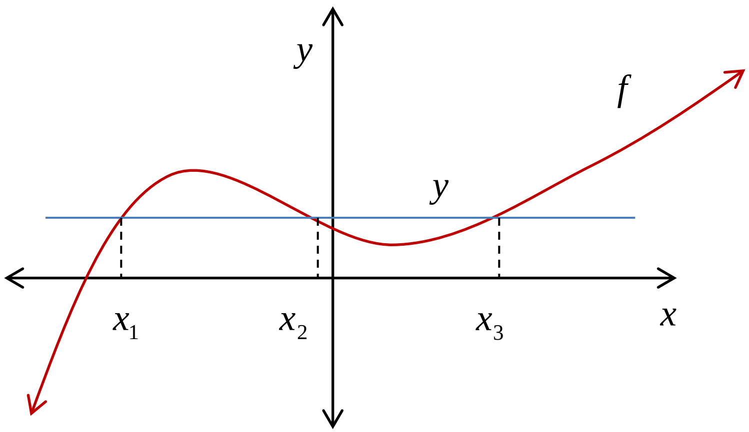
$\{y \ |y > 0\}$, o $[0, \infty)$

Función biyectiva

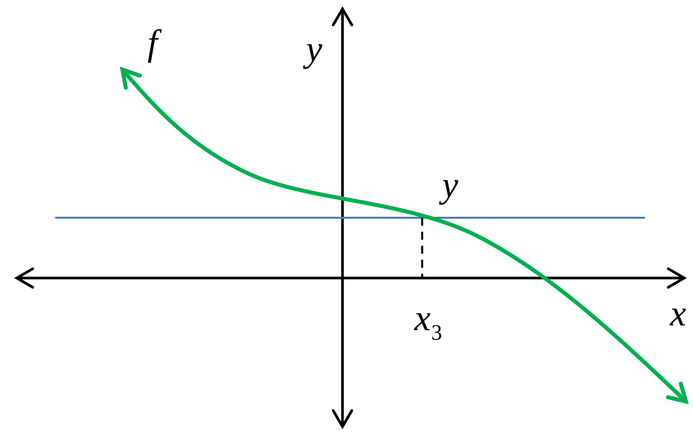
Una función f biunívoca si, y solo si, para cada valor del rango corresponde exactamente un valor del dominio.

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL PARA FUNCIONES BIUNIVOCAS

Una función f es biunívoca si, y solo si, las rectas horizontales que pasan por los valores del rango interceptan la grafica exactamente en un punto



f no es biunívoca



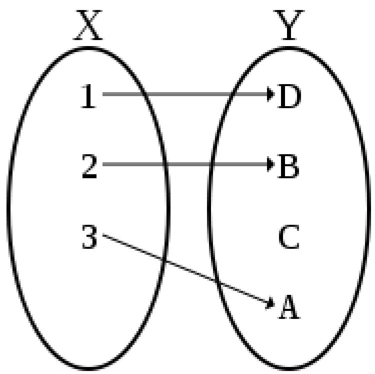
f es biunívoca

Teorema

Si es una función biyectiva, entonces su función inversa existe y también es biyectiva.

Función inyectiva

Una función *f* es inyectiva si a cada elemento x de X, le corresponde un solo valor y de Y, es decir, en el conjunto A no puede haber dos o mas elemento que contengan la misma imagen



Composición de Funciones.

Función compuesta

La función compuesta de f y g, escrita $g \circ f$, es la función definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. El dominio de $g \circ f$ es el subconjunto del dominio de f que contiene aquellos valores para los cuales $g \circ f$ esta definida.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)]
\end{tikzcd}
$$

Sean $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 4x + 1$

$(g \circ f)(x)$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right, "g \circ g"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g[g(x)]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ g)(x) &= g[g(x)] \\
&= g(4x+1) \\
&= 4(4x+1)+1 \\
&= 16x+5
\end{aligned}
$$

Dominio todos los reales

$(f \circ g)(x)$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & f[g(x)]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\
&= f(4x+1) \\
&= 2(4x+1)^2 \\
&= 32x^2 + 16x62
\end{aligned}
$$

$(f \circ g)(x)$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g[f(x)]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\
&= g(2x^2) \\
&= 4(2x^2)+1 \\
&= 8x^2+1
\end{aligned}
$$

Función inversa

Se f y g dos funciones tales que $(g \circ f)(x) = x$, para cada elemento x del dominio de f y $(f \circ g)(x) = x$, para cada elemento x del dominio de g , entonces f y g se dice que son invertibles, y cada una de ellas se llama inversa de la otra . Se usa en la notación

$$g = f^{-1} \quad o \quad f = g^{-1}$$

Ejemplo: Considere $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x - 5$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(x+5) \\ &= (x+5) - 5 \\ &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f(x-5) \\ &= (x-5) + 5 \\ &= x\end{aligned}$$

Esquemáticamente

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & f(x) \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] & g(x) \arrow[l, bend left, "f"] \end{tikzcd}$$

De la composición de las funciones f y g resulta la función identidad, esto es $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

Operaciones entre funciones: adición, sustracción, multiplicación, división y composición

Sean f y g dos funciones que D_f y D_g representan los dominios de f y g respectivamente; entonces

Definimos las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g\ y\ {}^{f}\!/_{g}$, llamadas respectivamente suma, diferencia, producto y cociente, como sigue

$$
\begin{aligned}
f+g &= \{(x,y)\ |y=f(x)+g(x)\ y\ x\in D_f\cap D_g\}\\
f-g &= \{(x,y)\ |y=f(x)-g(x)\ y\ x\in D_f\cap D_g\}\\
f.g &= \{(x,y)\ |y=f(x).g(x)\ y\ x\in D_f\cap D_g\}\\
\frac{f}{g} &= \left\{(x,y)\ |y=\frac{f(x)}{g(x)},g(x)\neq 0\ y\ x\in D_f\cap D_g\right\}
\end{aligned}
$$

Donde $g(x)\neq 0$ indica que $\dfrac{f}{g}$ solamente tiene significado si excluimos $x\in D_g$ que haga $g(x)=0$