Capítulo 3

La Matriz de Transición

3.1 Respuesta natural de un sistema

Es la respuesta que depende solamente de las condiciones iniciales, se obtiene cuando la entrada al sistema $\mathbf{u}(t)$ se hace igual a cero, analíticamente viene dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3.1}$$

Donde $\mathbf{u}(t) = 0$. entonces:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{3.2}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3.2) se obtiene:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \tag{3.3}$$

Re-acomodando la ecuación (3.3) se obtiene:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{3.4}$$

La ecuación de salida es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{3.5}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3.5) (con $\mathbf{u}(t) = 0$) se obtiene:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{3.6}$$

3.2 Polinomio característico o ecuación característica

Es el polinomio que se obtiene al calcular el determinante de la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, para el caso de sistemas SISO correponde al denominador de la función de transferencia.

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \tag{3.7}$$

3.3 Autovalores o eigenvalues de la matriz A

Son las raices de la ecuación característica, en términos de control se denominan polos

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{3.8}$$

3.4 Matriz de transición

Es la matriz que define la transición de los estados desde un instante t_0 hasta un instante t

$$\Phi\left(t, t_0\right) = \pounds^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\right\} \tag{3.9}$$

Lo que implica que

$$\mathbf{x}\left(t\right) = \Phi\left(t, t_0\right)\mathbf{x}\left(0\right) \tag{3.10}$$

Donde

$$\Phi\left(t, t_o\right) = e^{\mathbf{A}\left(t - t_o\right)} \tag{3.11}$$

Si $t_0 = 0$ se tiene que

$$\Phi\left(t\right) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \ldots \tag{3.12}$$

Métodos para calcular $\Phi\left(t\right)$: Existen muchos métodos para hacer este cálculo, a continuación se presentarán solo algunos de las opciones de solución posibles.

3.4.1 1) Directo

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \ldots \tag{3.13}$$

Es sencillo de aplicar si se tiene una herramienta numérica, si la expansión es infinita, se debe detener y tratar de reconocer las expansiones exponenciales que se formen en cada uno de los elementos de la matriz.

Si la matriz $\mathbf{A}$ es *nilpotent* de orden p, la respuesta es cerrada si la expansión se hace hasta $\mathbf{A}^p$. Una matriz es *nilpotent* si a partir de una potencia p, todos los elementos de la matriz $\mathbf{A}^p$ son iguales a cero.

3.4.2 2) Calculando la matriz diagonal

Si todos los autovalores de A son diferentes se hace una transformación de similaridad para obtener

$$\mathcal{D} = \mathbf{TAT}^{-1} \tag{3.14}$$

Donde $\mathcal{D}$ es una matriz diagonal. La diagonal está formada por los autovalores. En este cambio se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) \tag{3.15}$$

y

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{D}\mathbf{z}(t) \tag{3.16}$$

Las soluciones homogeneas son:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{3.17}$$

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathcal{D}t}\mathbf{z}(0) = e^{\mathbf{TAT}^{-1}t}\mathbf{z}(0) \tag{3.18}$$

Lo que implica que

$$e^{\mathcal{D}t} = e^{\mathbf{TAT}^{-1}t} \tag{3.19}$$

Calculando directamente

$$e^{\mathbf{TAT}^{-1}t} = \mathbf{I} + \left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)t + \frac{1}{2}\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)^2 t^2 + \frac{1}{3!}\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)^3 t^3 + \ldots \tag{3.20}$$

$$e^{\mathbf{TAT}^{-1}t} = \mathbf{TT}^{-1} + \left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)t + \frac{1}{2}\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)^2 t^2 + \frac{1}{3!}\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)^3 t^3 + \ldots \tag{3.21}$$

Debido a que:

$$\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)^n = \left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right)\cdots\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right) = \mathbf{TA}^n\mathbf{T}^{-1} \tag{3.22}$$

Se tiene:

$$e^{\mathbf{TAT}^{-1}t} = \mathbf{T}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \ldots\right)\mathbf{T}^{-1} \tag{3.23}$$

$$e^{\mathbf{TAT}^{-1}t} = \mathbf{T}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T}^{-1} = e^{\mathcal{D}t} \tag{3.24}$$

Aprovechando las propiedades de los autovalores y autovectores

$$\left(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{x} = 0 \tag{3.25}$$

$$espectro\,(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \tag{3.26}$$

Si $\mathbf{x}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ asociado a un autovalor λ entonces

$$\mathbf{x} \in \eta\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{nulidad de }\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \tag{3.27}$$

Ejemplo:
Suponga que se desea hallar los autovalores y autovectores de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Para hallar los autovalores se calcula el determinante de $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2\,(\lambda - 1) - 3\,(\lambda - 1) = \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 3 \tag{3.30}$$

(En MATLAB: $CE = poly(A)$)
Los autovalores son las raices de $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0 \tag{3.31}$$

Los cuales se calculan en MATLAB usando la función: $lambda = roots(poly(A))$, donde se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.73205 \\ \lambda_2 &= -1.73205 \\ \lambda_3 &= 1.00000 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Para obtener los autovectores se define

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Se calcula $(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{v}_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1.73205 & 0 & -1 \\ 0 & 0.73205 & 0 \\ -3.0000 & 0 & 1.73205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} 1.73205v_{11} - v_{31} &= 0 \\ 0.73205v_{21} &= 0 \\ -3.0000v_{11} + 1.73205v_{31} &= 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Se obtiene

$$\begin{array}{rcl} v_{31} & = & 1.73205 v_{11} \\ v_{21} & = & 0 \end{array} \tag{3.36}$$

Si además se hace la norma del vector v_1 igual a 1 se tiene que

$$|\mathbf{v}_1| = \sqrt{v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{31}^2} = 1 \tag{3.37}$$

$$v_{11}^2 + v_{31}^2 = 1 \tag{3.38}$$

$$v_{11}^2 + 3v_{11}^2 = 1 \tag{3.39}$$

$$v_{11} = 0.50000 \tag{3.40}$$

$$v_{31} = 0.866025 \tag{3.41}$$

Procediendo de la misma manera para $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.50000 \\ 0.0000 \\ 0.866025 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.50000 \\ 0.0000 \\ -0.866025 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -1.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Reuniendo los autovectores en una matriz se tiene

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.50000 & 0.50000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \\ 0.866025 & -0.866025 & 0.0000 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Donde

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{3.44}$$

$$\lambda \mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{V} \tag{3.45}$$

Si todos los autovalores son diferentes entonces $\mathbf{V}$ es invertible

$$\mathcal{D} = \lambda \mathbf{I} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} \tag{3.46}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.57735 \\ 1.000 & 0.000 & -0.57735 \\ 0.000 & -1.00 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.50000 & 0.50000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \\ 0.866025 & -0.866025 & 0.0000 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1.73205 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.73205 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0000 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

(MATLAB: $[\mathbf{V}, \mathcal{D}] = eig(\mathbf{A})$)
Donde es fácil calcular $e^{\mathcal{D}t}$

$$e^{\mathcal{D}t} = \begin{bmatrix} e^{1.73205t} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & e^{-1.73205t} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & e^{t} \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

Además

$$e^{\mathcal{D}t} = \mathbf{T} e^{\mathbf{At}} \mathbf{T}^{-1} \tag{3.50}$$

Despejando $e^{\mathbf{A}t}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}^{-1} e^{\mathcal{D}t} \mathbf{T} \tag{3.51}$$

Donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1} \tag{3.52}$$

Entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V} e^{\mathcal{D}t} \mathbf{V}^{-1} \tag{3.53}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.50000 & 0.50000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \\ 0.866025 & -0.866025 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1.73205t} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & e^{-1.73205t} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.57735 \\ 1.000 & 0.000 & -0.57735 \\ 0.000 & -1.00 & 0.000 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.5e^{1.73205t} & 0.5e^{-1.73205t} & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -e^{t} \\ 0.866025e^{1.73205t} & -0.866025e^{-1.73205t} & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.57735 \\ 1.000 & 0.000 & -0.57735 \\ 0.000 & -1.00 & 0.000 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.5\left(e^{1.73205t} + e^{-1.73205t}\right) & 0.0000 & 0.288675\left(e^{1.73205t} - e^{-1.73205t}\right) \\ 0.0000 & e^{t} & 0.0000 \\ 0.866025\left(e^{1.73205t} - e^{-1.73205t}\right) & 0.0000 & 0.5\left(e^{1.73205t} + e^{-1.73205t}\right) \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

3.4.3 3) Calculando $\pounds^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}$

Suponga que se desea hallar los autovalores y autovectores de la matriz:

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ -3 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{adj\,(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|} \tag{3.58}$$

$$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|=s^2\,(s-1)-3\,(s-1)=\left(s^2-3\right)(s-1) \tag{3.59}$$

$$cofact\,(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} s\,(s-1) & 0 & 3\,(s-1) \\ 0 & s^2-3 & 0 \\ s-1 & 0 & s\,(s-1) \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

$$adj\,(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=(cofact\,(s\mathbf{I}-\mathbf{A}))^T=\begin{bmatrix} s\,(s-1) & 0 & s-1 \\ 0 & s^2-3 & 0 \\ 3\,(s-1) & 0 & s\,(s-1) \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{adj\,(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}=\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2-3} & 0 & \frac{1}{s^2-3} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{3}{s^2-3} & 0 & \frac{s}{s^2-3} \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

Calculando cada uno de los polos

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{s}{\left(s-\sqrt{3}\right)\left(s+\sqrt{3}\right)} & 0 & \frac{1}{\left(s-\sqrt{3}\right)\left(s+\sqrt{3}\right)} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{3}{\left(s-\sqrt{3}\right)\left(s+\sqrt{3}\right)} & 0 & \frac{s}{\left(s-\sqrt{3}\right)\left(s+\sqrt{3}\right)} \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Haciendo expansión en fracciones parciales

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{K_1}{s-\sqrt{3}}+\frac{K_2}{s+\sqrt{3}} & 0 & \frac{K_3}{s-\sqrt{3}}+\frac{K_4}{s+\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{K_5}{s-\sqrt{3}}+\frac{K_6}{s+\sqrt{3}} & 0 & \frac{K_1}{s-\sqrt{3}}+\frac{K_2}{s+\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

Calculando el valor de los residuos (usando la funcion *residue* de MATLAB)

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.5}{s-\sqrt{3}}+\dfrac{0.5}{s+\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{0.28867}{s-\sqrt{3}}+\dfrac{-0.28867}{s+\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{1}{s-1} & 0 \\ \dfrac{0.86602}{s-\sqrt{3}}+\dfrac{-0.86602}{s+\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{0.5}{s-\sqrt{3}}+\dfrac{0.5}{s+\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

$$\pounds^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 0.5\left(e^{1.73205t}+e^{-1.73205t}\right) & 0.0000 & 0.288675\left(e^{1.73205t}-e^{-1.73205t}\right) \\ 0.0000 & e^{t} & 0.0000 \\ 0.866025\left(e^{1.73205t}-e^{-1.73205t}\right) & 0.0000 & 0.5\left(e^{1.73205t}+e^{-1.73205t}\right) \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

3.4.4 4) Calculando analíticamente a partir de la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{3.67}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 3x_1(t) \end{aligned} \tag{3.69}$$

Aplicando la transformada de Laplace (considerando las condiciones iniciales)

$$\begin{aligned} sX_1(s)-x_1(0) &= X_3(s) \\ sX_2(s)-x_2(0) &= X_2(s) \\ sX_3(s)-x_3(0) &= 3X_1(s) \end{aligned} \tag{3.70}$$

Despejando

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= X_3(s)+x_1(0) \\ sX_2(s) &= X_2(s)+x_2(0) \\ sX_3(s) &= 3X_1(s)+x_3(0) \end{aligned} \tag{3.71}$$

Multiplicando la primera y la tercera ecuación por s

$$\begin{aligned} s^2X_1(s) &= sX_3(s)+sx_1(0) \\ sX_2(s)-X_2(s) &= x_2(0) \\ s^2X_3(s) &= 3sX_1(s)+sx_3(0) \end{aligned} \tag{3.72}$$

Substituyendo $sX_3(s)$ en la primera ecuación y $sX_1(s)$ en la tercera

$$\begin{array}{rcl} s^2X_1(s) & = & 3X_1(s) + x_3(0) + sx_1(0) \\ (s-1)X_2(s) & = & x_2(0) \\ s^2X_3(s) & = & 3(X_3(s) + x_1(0)) + sx_3(0) \end{array} \tag{3.73}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(s^2-3\right)X_1(s) & = & sx_1(0) + x_3(0) \\ (s-1)X_2(s) & = & x_2(0) \\ \left(s^2-3\right)X_3(s) & = & 3x_1(0) + sx_3(0) \end{array} \tag{3.74}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2-3} & 0 & \dfrac{1}{s^2-3} \\ 0 & \dfrac{1}{s-1} & 0 \\ \dfrac{3}{s^2-3} & 0 & \dfrac{s}{s^2-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

Lo cual se resuelve de la misma manera que se hizo en el método anterior, calculando los polos, haciendo la expansión en fracciones parciales, calculando el valor de los residuos y aplicando la inversa de la transformada de Laplace para obtener

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5\left(e^{1.73205t} + e^{-1.73205t}\right) & 0.0000 & 0.288675\left(e^{1.73205t} - e^{-1.73205t}\right) \\ 0.0000 & e^t & 0.0000 \\ 0.866025\left(e^{1.73205t} - e^{-1.73205t}\right) & 0.0000 & 0.5\left(e^{1.73205t} + e^{-1.73205t}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

3.4.5 5) Calculando gráficamente a partir de la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{3.77}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

El diagrama de flujo de señales que representa la ecuación de estado es:

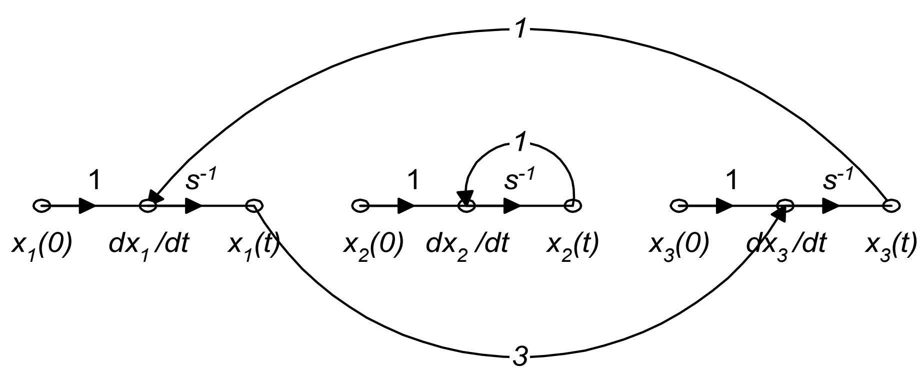

Figura 1

En esta caso se tiene un sistema con tres entradas $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$ y tres salidas $X_1(s)$, $X_2(s)$ y $X_3(s)$

Lazos de Realimentación:

$T_1 = s^{-1}$

$T_2 = 3s^{-2}$

$\Delta = 1 - T_1 - T_2 + T_1 T_2 = 1 - s^{-1} - 3s^{-2} + 3s^{-3} = \dfrac{s^3 - s^2 - 3s + 3}{s^3} = \dfrac{(s-1)(s^2-3)}{s^3}$

Caminos Directos	M_k	Δ_k	$M_k\Delta_k$	$\dfrac{M_k\Delta_k}{\Delta}$
$x_1(0) \to X_1(s)$	s^{-1}	$1 - T_1 = 1 - s^{-1}$	$\dfrac{s-1}{s^2}$	$\dfrac{s}{s^2-3}$
$x_2(0) \to X_1(s)$	0	Δ	0	0
$x_3(0) \to X_1(s)$	s^{-2}	$1 - T_1 = 1 - s^{-1}$	$\dfrac{s-1}{s^3}$	$\dfrac{1}{s^2-3}$
$x_1(0) \to X_2(s)$	0	Δ	0	0
$x_2(0) \to X_2(s)$	s^{-1}	$1 - T_2 = 1 - 3s^{-2}$	$\dfrac{s^2-3}{s^3}$	$\dfrac{1}{s-1}$
$x_3(0) \to X_2(s)$	0	Δ	0	0
$x_1(0) \to X_3(s)$	$3s^{-2}$	$1 - T_1 = 1 - s^{-1}$	$\dfrac{3(s-1)}{s^3}$	$\dfrac{3}{s^2-3}$
$x_2(0) \to X_3(s)$	0	Δ	0	0
$x_3(0) \to X_3(s)$	s^{-1}	$1 - T_1 = 1 - s^{-1}$	$\dfrac{s-1}{s^2}$	$\dfrac{s}{s^2-3}$

Agrupando estos resultados en una ecuación matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2-3} & 0 & \dfrac{1}{s^2-3} \\ 0 & \dfrac{1}{s-1} & 0 \\ \dfrac{3}{s^2-3} & 0 & \dfrac{s}{s^2-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

El cual es el mismo resultado parcial que se obtuvo en la solución analítica.

Propiedades de la matriz de transición de estados $\Phi(t)$:

1) $\Phi(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$

2) $\Phi^{-1}(t) = \left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(-t)} = \Phi(-t)$

3) $\Phi(t_1 + t_2) = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1} e^{\mathbf{A}t_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$

4) $(\Phi(t))^n = \Phi(nt)$

5) $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$

Finalmente en cualquiera de los casos

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{3.80}$$

Entonces si $y(t)$ por ejemplo es

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{3.81}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2-3} & 0 & \frac{1}{s^2-3} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{3}{s^2-3} & 0 & \frac{s}{s^2-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2-3} & \frac{2}{s-1} & \frac{1}{s^2-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

Calculando los polos y expandiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{s-\sqrt{3}} + \frac{K_2}{s+\sqrt{3}} & \frac{2}{s-1} & \frac{K_3}{s-\sqrt{3}} + \frac{K_4}{s+\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

Calculando el valor de los residuos (usando la funcion *residue* de MATLAB)

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5}{s-\sqrt{3}} + \frac{0.5}{s+\sqrt{3}} & \frac{2}{s-1} & \frac{0.28867}{s-\sqrt{3}} + \frac{-0.28867}{s+\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

$$y(t) = \pounds^{-1}\{\mathbf{Y}(s)\} = \begin{bmatrix} 0.5\left(e^{1.73205t} + e^{-1.73205t}\right) & 2e^{t} & 0.288675\left(e^{1.73205t} - e^{-1.73205t}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

3.5 Respuesta forzada de un sistema

Es la respuesta que depende solamente de las señales de entrada, se obtiene cuando las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$ se asumen igual a cero, analíticamente se calcula a partir de la función de transferencia

3.5.1 Correlación entre la función de transferencia y las ecuaciones de estado

La función de transferencia para un sistema de una entrada - una salida (SISO) se define como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{3.87}$$

En el caso de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) se define la matriz de funciones de transferencia:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\,\mathbf{U}(s) \tag{3.88}$$

Donde $\mathbf{Y}(s)$ es un vector $q \times 1$, $\mathbf{U}(s)$ es un vector $m \times 1$ y $\mathbf{G}(s)$ es una matriz $q \times m$.

Un sistema puede ser representado usando variables de estado a través de la realización:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3.89}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{3.90}$$

Donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estados $(n \times 1)$, $\mathbf{u}(t)$ es el vector de entradas $(m \times 1)$, $\mathbf{y}(t)$ es el vector de salidas $(q \times 1)$. La transformada de Laplace de las ecuaciones (3.89) y (3.90) es:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.91}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{3.92}$$

Re-acomodando la ecuación (3.91) para $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ se obtiene

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3.93}$$

Substituyendo la ecuación (3.93) en la ecuación (3.92) se obtiene

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{3.94}$$

Donde la matriz de funciones de transferencia $\mathbf{G}(s)$ es

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{3.95}$$

3.6 Ejercicio

1) Si todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ no son diferentes entre sí, no se puede obtener siempre la matriz diagonal $\mathcal{D}$; en ese caso se debe obtener la matriz de Jordan $\mathcal{J}$. Escriba una rutina en MATLAB para obtener la matriz de Jordan para una matriz $\mathbf{A}$ arbitaria seleccionada por usted (no trivial) y demuestre analíticamente usando esta matriz como se puede obtener la matriz de transición $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ Verifique su resultado usando el método equivalente $e^{At} = \pounds^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$.