Sistemas Multivariables

En la Figura 1 se muestra el diagrama de bloques de un sistema multivariable $P(s)$ con p entradas y q salidas.

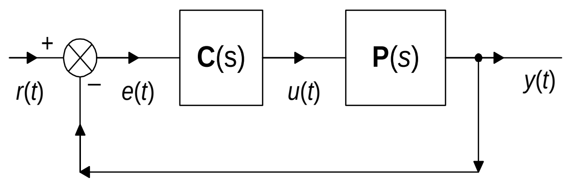

Figura 1

Las ecuaciones que describen el sistema de control son:

$$Y(s) = P(s)U(s) \tag{1}$$

$$U(s) = C(s)E(s) \tag{2}$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) \tag{3}$$

Donde $r(t)$; $y(t)$ y $e(t)$ son vectores $q \times 1$; $u(t)$ es un vector $p \times 1$; $P(s)$ es una matriz $p \times q$ y $C(s)$ es una matriz $q \times p$:

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$Y(s) = P(s)C(s)R(s) - P(s)C(s)Y(s) \tag{4}$$

Agrupando términos

$$[I + P(s)C(s)]Y(s) = P(s)C(s)R(s) \tag{5}$$

Si la matriz $[I + P(s)C(s)]$ es invertible, entonces se tiene que:

$$Y(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s)R(s) \tag{6}$$

De…niendo la matriz de transferencia en lazo cerrado como $M(s)$:

$$M(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s) \tag{7}$$

La ecuación (6) puede re-escribirse como:

$$Y(s) = M(s)R(s) \tag{8}$$

Ejemplo:

Suponga un sistema y un proceso de…nidos por las siguientes matrices:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} & 0 & \frac{1}{s+2} \\ 0 & -\frac{1}{s} & \frac{1}{s+3} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & 0 & 0 & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+3} & \frac{2}{s+3} & 0 \\ \frac{2}{s+4} & \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & 0 & \frac{1}{s+3} \\ \frac{3}{s+1} & \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Como se observa el sistema de control opera con tres variables controladas y cuatro manipuladas, lo que es razonable, ya que el número de variables manipuladas debe igual o mayor que el número de variables controladas.

Cálculo de la matriz de transferencia $M(s)$

Para simpli…car el análisis se denotarán los elementos de las matrices de la siguiente forma:

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$P(s)\,C(s) = \begin{bmatrix} pc_{11} & pc_{12} & pc_{13} \\ pc_{21} & pc_{22} & pc_{23} \\ pc_{31} & pc_{32} & pc_{33} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Donde

$$pc_{ij} = \sum_{k=1} p_{ik} c_{kj} \tag{14}$$

$$I + P(s)\,C(s) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\text{cofactores}[I + P(s)\,C(s)] = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & -a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23} & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ -a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{32} + a_{31}a_{12} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} & -a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\text{adj}[I + P(s)\,C(s)] = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & -a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ -a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & -a_{11}a_{32} + a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\det[I + P(s)\,C(s)] = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \tag{18}$$

$$[I + P(s)\,C(s)]^{-1} = \frac{\text{adj}[I + P(s)\,C(s)]}{\det[I + P(s)\,C(s)]} \tag{19}$$

Finalmente

$$M(s) = [I + P(s)\,C(s)]^{-1} P(s)\,C(s) \tag{20}$$