Apéndice A

Algebra Lineal

Considérese el sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{array} \tag{A.1}$$

El cual se puede escribir de una manera más compacta como:

$$Ax = y \tag{A.2}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Matriz: Es un arreglo de números o elementos con n filas y m columnas.

Elemento de una matriz: a_{ij} es un elemento de la matriz A. Localizado en la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Orden de una matriz: Se refiere al número total de filas y columnas de una matriz. Una matriz con n filas y m columnas se denomina $n \times m$ ó n por m.

Matriz cuadrada: Una matriz es cuadrada si el número de filas y columnas es igual: $n \equiv m$.

Matriz columna: Es la que tiene una columna y más de una fila, es decir, una matriz $n \times 1$, $n > 1$. También recibe el nombre de **vector**.

Matriz fila: Es la que tiene una fila y más de una columna, es decir, una matriz $1 \times m$, $m > 1$. También recibe el nombre de **vector-fila**.

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada en la cual los $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Matriz unidad o matriz identidad: Es una matriz diagonal con todos los elementos en la diagonal principal ($i = j$) igual a 1. Generalmente esta matriz se denota con la letra I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

Matriz nula: Es una matriz en la cual todos los elementos son iguales a cero.

Matriz simétrica: Es una matriz cuadrada que satisface la condición $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y j.

Determinante de una matriz: Es el valor numérico (escalar) asociado a una matriz cuadrada. El determinante se designa como:

$$\det A = |A| \tag{A.5}$$

Por ejemplo el determinante de una matriz A se escribe:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{A.6}$$

Cofactor: El cofactor de un elemento a_{ij} del determinante de una matriz $|A|$ es el determinante obtenido despues de eliminar todos los elementos de la fila i, la columna j y multiplicar por $(-1)^{i+j}$, A_{ij}. De manera que:

$$\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (j = 1, \text{o } 2, ..., \text{o } n) \tag{A.7}$$

o

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (i = 1, \text{o } 2, ..., \text{o } n) \tag{A.8}$$

Nota: A las expresiones para calcular el determinante dadas en las ecuaciones (A.7) y (A.8) se les denomina **expansión del determinante de Laplace**.

Ejemplo:

Dado

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

Entonces:

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{A.10}$$

$$|A| = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \tag{A.11}$$

Matriz singular: Una matriz cuadrada es singular si el valor de su determinante es igual a cero. Cuando esto ocurre, usualmente significa que no todas las columnas o no todas filas son independientes entre ellas.

Transpuesta de una matriz: La transpuesta de una matriz A es la matriz que se obtiene al intercambiar las corespondientes filas y columnas de A.

Dado A una matriz $n \times m$ que se representa como:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n,m} \tag{A.12}$$

La transpuesta de A, denotada como A^T, es dada por:

$$A^T = \left[a_{ij}\right]_{m,n} \tag{A.13}$$

Ejemplo:

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

Entonces:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

Propiedades de la matriz transpuesta:

$\left(A^T\right)^T = A$

$(kA)^T = kA^T$, donde k es un escalar.

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

Matriz adjunta: Dada A una matriz cuadrada de orden n. La matriz adjunta de A, denotada como $adjA$, se define como:

$$adjA = [A_{ij} \text{ del } \det A]^T_{n,n} \tag{A.16}$$

Donde A_{ij} denota el cofactor de a_{ij}.
Ejemplo:
Dada:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

Los cofactores son: $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$ y $A_{22} = a_{11}$. Entonces la matriz adjunta de A es:

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

Una matriz cuadrada es singular si el valor de su determinante es igual a cero. Cuando esto ocurre, usualmente significa que no todas las columnas o no todas filas son independientes entre ellas.

A.1 ALGEBRA DE MATRICES

Igualdad de matrices: Dos matrices A y B son iguales si satisfacen las siguientes condiciones:
1.- Tienen el mismo orden.
2.- Los elementos correspondientes son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y j.

Adición y substracción de matrices: Dos matrices pueden ser sumadas o substraidas para formar $A \pm B$ si tienen el mismo orden.

$$C = A \pm B \rightarrow [c_{ij}]_{n,m} = [a_{ij}]_{n,m} \pm [b_{ij}]_{n,m} \tag{A.19}$$

Donde:
$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ para todo i y j.

Ley asociativa de la adición y substración de matrices:

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{A.20}$$

Ley conmutativa de la adición y substración de matrices:

$$A + B + C = A + C + B = C + B + A \tag{A.21}$$

Multiplicación de matrices: Las matrices A y B pueden ser multiplicadas para formar el producto AB si ellas son **conformables**. Esto significa que el número de columnas de A tiene que ser igual al número de filas de B.

Es decir, si por ejemplo:

$A = [a_{ij}]_{n,p}$ y $B = [b_{ij}]_{q,m}$

Se dice que A y B son conformables para formar el producto AB si y solo si $p = q$. En este caso se podría obtener

$$C = AB = [a_{ij}]_{n,p} [b_{ij}]_{p,m} = [c_{ij}]_{n,m} \tag{A.22}$$

Es importante hacer notar que si A y B son conformables para formar el producto AB, no necesariamente lo son para formar el producto BA, lo que implica que la ley conmutativa en general no es valida para la multiplicación. Incluso si A y B son conformables para también formar el producto BA, en general $AB \neq BA$.

Reglas en la multiplicación de matrices:

Dadas las matrices A $(n \times p)$ y B $(p \times m)$ conformables para formar el producto $C = AB$, el ij-ésimo elemento de la matriz C, se obtiene de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \tag{A.23}$$

Para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$.

Ley asociativa y distributiva de la multiplicación de matrices:

Aunque la ley conmutativa de la multiplicación en general no se cumple, si las matrices son conformables para formar los productos descritos a continuación, las leyes asociativa y distributiva son válidas.

Ley Distributiva:

$$A\,(B + C) = AB + AC \tag{A.24}$$

Ley Asociativa:

$$(AB)\,C = A\,(BC) \tag{A.25}$$

Multiplicación por un escalar:

Multiplicar una matriz A por un escalar k, es equivalente a multiplicar cada elemento de A por k. Es decir si $A = [a_{ij}]_{n,m}$, entonces:

$$kA = [ka_{ij}]_{n,m} \tag{A.26}$$

Inversa de una matriz:

Si $Ax = y$, entonces podría ser posible escribir:

$$x = A^{-1} y \tag{A.27}$$

Donde A^{-1} denota la matriz inversa de A. Las condiciones para que A^{-1} exista son:

1.- A es una matriz cuadrada.
2.- A no es singular.
3.- Si A^{-1} existe, está dada por:

$$A^{-1} = \frac{adj A}{|A|} \tag{A.28}$$

Propiedades de la inversa de una matriz:
1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2.- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3.- Si A^{-1} existe, el producto: $AB = AC \rightarrow B = C$.
4.- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Rango de una matriz: El rango de una matriz es el máximo número de columnas de A que son linealmente independientes, o es el orden de la matriz nosingular más grande contenida en A.

Propiedades asociadas al rango de una matriz:
1.- $rango\,(A) = rango\left(A^T\right)$.
2.- $rango\,(A) = rango\left(A^T A\right)$.
3.- $rango\,(A) = rango\left(AA^T\right)$.

Las propiedades 2 y 3 son muy utiles ya que se puede revisar el rango al calcular el determinante de la matriz de menor orden obtenida usando la propiedad más conveniente.

Normas:
$l_2 - norm : \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$
$l_\infty - norm : \|x\|_\infty = \max\limits_{0<i\leq\infty} |x_i|$

Bibliografia:

KUO, Benjamin C.
Automatic Control Systems, 6th edition, Prentice-Hall, 1991.