Flujo Compresible

1 Propiedades de Estancamiento:

1.1 Estado de estancamiento isoentrópico

Es el estado que alcanzaría un fluido en movimiento si experimenta una desaceleración adiabática reversible hasta que su velocidad sea cero.

Aplicando la Primera Ley de la Termodinámica:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \tag{1}$$

1.2 Estado de estancamiento actual o real

Es el estado alcanzado despues de una desaceleración hasta velocidad cero, pero con irreversibilidades asociadas.

$$h_{0,r} = h_{0,s} \tag{2}$$

$$T_{0,r} = T_{0,s} \tag{3}$$

$$P_{0,r} \leq P_{0,s} \tag{4}$$

Aplicaciones: Tubo Pitot, bomba de golpe de ariete.

1.3 Velocidad del sonido en un gas ideal

El sonido es una pequeña perturbación de presión dentro de un fluido compresible que viaja.

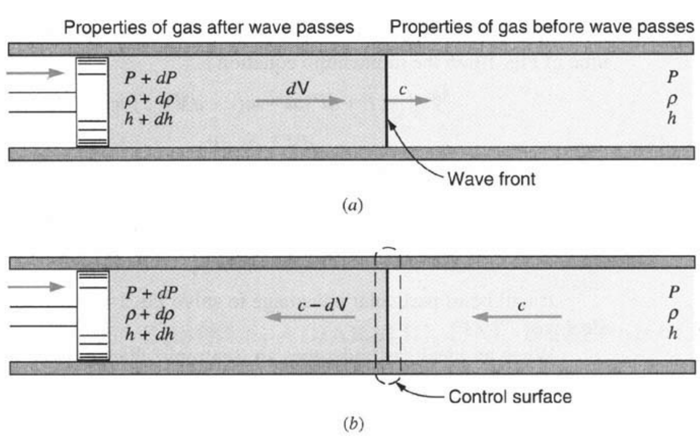


Diagram illustrating sonic velocity. (*a*) Stationary observer. (*b*) Observer traveling with wave front.

Figura 1

Aplicando la Primera Ley de la Termodinámica

$$h + \frac{c^2}{2} = h + dh + \frac{(c - dV)^2}{2} \tag{5}$$

$$h + \frac{c^2}{2} = h + dh + \frac{c^2}{2} - cdV + \frac{dV^2}{2} \tag{6}$$

Asumiendo que $\frac{dV^2}{2}$ es despreciable, se tiene:

$$dh = cdV \tag{7}$$

Primera ley para procesos reversibles

$$Tds = dh - \frac{dP}{\rho} \tag{8}$$

Suponiendo un proceso isoentrópico:

$$dh = \frac{dP}{\rho} \tag{9}$$

Se tiene entonces que:

$$cdV = \frac{dP}{\rho} \tag{10}$$

Ecuación de continuidad para el ducto:

$$\dot{m} = \rho V A \tag{11}$$

$$\rho c A = (\rho + d\rho)(c - dV) A \tag{12}$$

$$\rho c = \rho c - \rho dV + d\rho c - d\rho dV \tag{13}$$

Despreciando $d\rho dV$ se tiene:

$$dV = c\frac{d\rho}{\rho} \tag{14}$$

Sustituyendo se tiene:

$$c\left(c\frac{d\rho}{\rho}\right) = \frac{dP}{\rho} \tag{15}$$

$$c^2 = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s \tag{16}$$

Proceso isoentrópico (gas ideal)

$$Tds = dh - vdP \tag{17}$$

$$0 = Cp_0 dT - vdP \tag{18}$$

$$Pv = RT \tag{19}$$

$$Pdv + vdP = RdT \tag{20}$$

$$0 = Cp_0 \left(\frac{Pdv + vdP}{R} \right) - vdP \tag{21}$$

Además

$$Cp_0 - Cv_0 = R \tag{22}$$

$$K = \frac{Cp_0}{Cv_0} \tag{23}$$

$$K - 1 = \frac{R}{Cv_0} \tag{24}$$

$$Cv_0 = \frac{R}{K-1} \tag{25}$$

$$Cp_0 = \frac{KR}{K-1} \tag{26}$$

Sustituyendo:

$$0 = \frac{K}{K-1} (Pdv + vdP) - vdP \tag{27}$$

$$0 = KPdv + KvdP - KvdP + vdP \tag{28}$$

$$0 = KPdv + vdP \tag{29}$$

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{30}$$

$$dv = -\frac{d\rho}{\rho^2} \tag{31}$$

$$\frac{dP}{\rho} = KP\frac{d\rho}{\rho^2} \tag{32}$$

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{KP}{\rho} = c^2 \tag{33}$$

$$P = \rho RT \tag{34}$$

$$\frac{K\rho RT}{\rho} = c^2 \tag{35}$$

$$c^2 = KRT \tag{36}$$

$$c = \sqrt{KRT} \tag{37}$$

1.4 Número de Mach

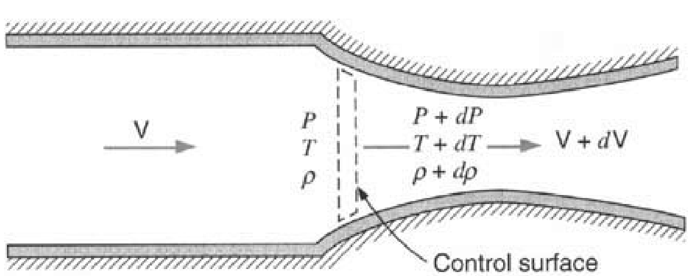
Se define como la relación entre la velocidad actual (V) y la velocidad del sonido (c)

$$M = \frac{V}{c} \tag{38}$$

De acuerdo a los valores de M se tiene:

$M < 1$	Flujo subsónico
$M = 1$	Flujo sónico
$M > 1$	Flujo supersónico

Condiciones geométricas que definen la diferencia entre una tobera y un difusor para estado estable - flujo estable, adiabático, reversible y unidimensional.



One-dimensional, reversible, adiabatic steady flow through a nozzle.

Figura 2

Primera Ley de la Termodinámica (despreciando energía potencial)

$$h_s - h_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} = 0 \tag{39}$$

En forma diferencial

$$dh + VdV = 0 \tag{40}$$

Segunda Ley

$$Tds = dh - \frac{dP}{\rho} \tag{41}$$

Proceso isoentrópico

$$dh = \frac{dP}{\rho} \tag{42}$$

Sustituyendo

$$VdV = -\frac{dP}{\rho} \tag{43}$$

Ecuación de continuidad

$$\dot{m} = \text{constante} = \rho VA \tag{44}$$

$$d\dot{m} = 0 = VAd\rho + \rho AdV + \rho VdA \tag{45}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \tag{46}$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dV}{V} \tag{47}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dP}{\rho V^2} \tag{48}$$

Como

$$\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s = c^2 \tag{49}$$

y

$$M = \frac{V}{c} \tag{50}$$

Se tiene

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dP}{\rho c^2} - \frac{dP}{\rho V^2} = -\frac{dPM^2}{\rho V^2} + \frac{dP}{\rho V^2} \tag{51}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho V^2}\left(1 - M^2\right) \tag{52}$$

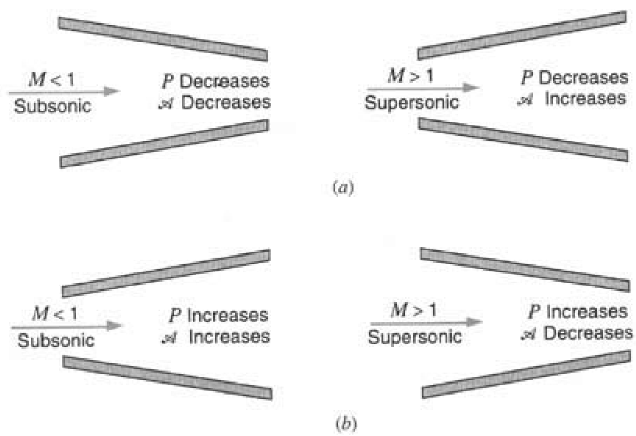
Interpretación de la ecuación:
Las variables A, ρ y V^2 siempre son positivas.

1) Si es tobera y flujo subsónico:
$dP < 0 \wedge M < 1 \rightarrow dA < 0$ forma convergente.

2) Si es difusor y flujo subsónico:
$dP > 0 \wedge M < 1 \rightarrow dA > 0$ forma divergente.

1) Si es tobera y flujo supersónico:
$dP < 0 \wedge M > 1 \rightarrow dA > 0$ forma divergente.

1) Si es difusor y flujo supersónico:
$dP > 0 \wedge M > 1 \rightarrow dA < 0$ forma convergente.



Required area changes for (a) nozzles and (b) diffusers.

Figura 3

Volviendo a la ecuación que relaciona un estado cualquiera con su estado de estancamiento y considerando comportamiento de gas ideal.

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 \tag{53}$$

$$V^2 = 2\left(h_0 - h\right) \tag{54}$$

$$V^2 = 2Cp_0\left(T_0 - T\right) = 2\left(\frac{KR}{K-1}\right)T\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) \tag{55}$$

Además

$$c^2 = KRT \tag{56}$$

Se tiene:

$$V^2 = \frac{2c^2}{K-1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) \tag{57}$$

Por definición

$$M = \frac{V}{c} \tag{58}$$

Se tiene:

$$M^2 = \frac{2}{K-1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) \tag{59}$$

$$\frac{T_0}{T} = \frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1 \tag{60}$$

Para un proceso isoentrópico, gas ideal:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{K}{K-1}} \tag{61}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{K-1}} \tag{62}$$

Las condiciones en la garganta de una tobera pueden determinarse notando que $M = 1$, estas propiedades se denotarán con un asterisco.

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{K+1} \quad , \quad \frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}} \quad , \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{1}{K-1}}$$

Estas propiedades en la garganta cuando $M = 1$ se refieren como temperatura crítica, presión crítica y densidad crítica.

Flujo de masa de un gas ideal a través de una tobera o un difusor isoentrópico.

$$\dot{m} = \rho V A \tag{63}$$

$$\dot{m} = \left(\frac{P}{RT}\right)(Mc)\,A = \left(\frac{P}{RT}\right)\left(M\sqrt{KRT}\right)A \tag{64}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = PM\sqrt{\frac{K}{RT}} \tag{65}$$

Expresando a P y T en términos de las propiedades de estancamiento y el número de Mach:
Definiendo

$$B = \frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1 \tag{66}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{P_0}{B^{\frac{K}{K-1}}} M \sqrt{\frac{KB}{RT_0}} \tag{67}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{K}{R}} \frac{M}{B^{\frac{K+1}{2(K-1)}}} \tag{68}$$

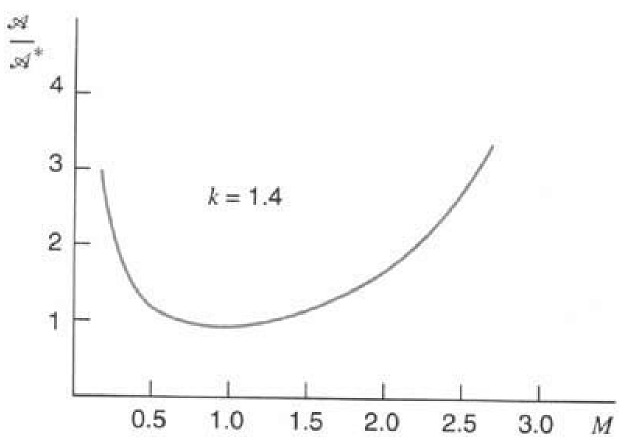
$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{K}{R}} \frac{M}{\left[\frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1\right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}}} \tag{69}$$

En la garganta $M = 1$ y el flujo por unidad de área en la garganta es:

$$\frac{\dot{m}}{A^*} = \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{K}{R}} \frac{1}{\left[\frac{K+1}{2}\right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}}} \tag{70}$$

La razón de área A/A^* se puede obtener al dividir las dos ecuaciones:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{K+1}\left(\frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1\right)\right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}} \tag{71}$$



Area ratio as a function of Mach number for a reversible, adiabatic nozzle.

Figura 4

Efecto de la presión de la succión a la salida de una tobera convergente.

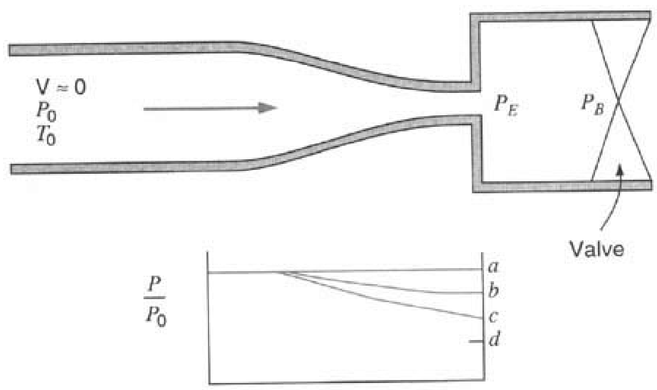
Denotando P_E como la presión de salida y P_B como la presión de succión.

Cuando $P_B/P_0 = 1$ no hay flujo y $P_E/P_0 = 1$ (punto a)

Si P_B desciende hasta el punto b, en el cual P_B/P_0 sea más grande que la razón de presión crítica, el número de Mach de salida es menor que 1.

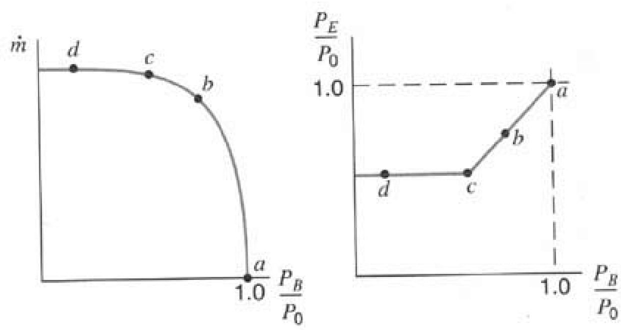
Si P_B desciende hasta el punto c, en el cual P_B/P_0 es igual a la razón de presión crítica, el número de Mach de salida es igual a 1.

Si P_B desciende hasta el punto d, en el cual P_B/P_0 es mayor que la razón de presión crítica, el número de Mach de salida es igual a 1 y no hay incremento de flujo másico. La P_E permanece constante e igual a la presión crítica, ocurriendo una caída de presión de P_E a P_B fuera de la tobera. En estas condiciones se dice que la tobera está estrangulada, lo cual significa que para unas condiciones de estancamiento dadas pasará la máxima cantidad de masa por la tobera.



Pressure ratio as a function of back pressure for a convergent nozzle.

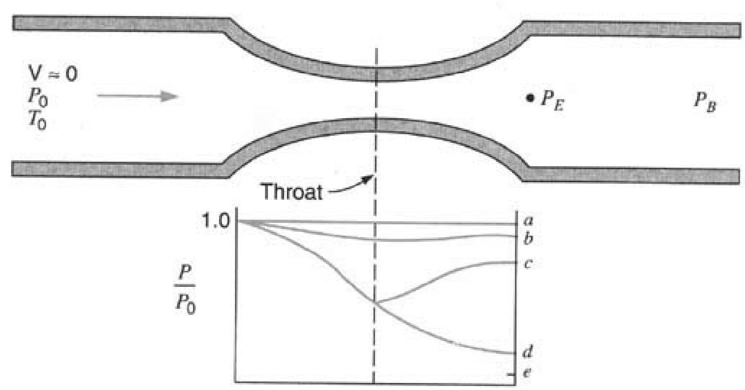
Figura 5



Mass rate of flow and exit pressure as a function of back pressure for a convergent nozzle.

Figura 6

Efecto de la presión de la succión a la salida de una tobera convergente-divergente.



Nozzle pressure ratio as a function of back pressure for a reversible, convergent–divergent nozzle.

Figura 7

Punto a: no hay flujo y $P_B = P_0$

Punto b: la sección divergente actúa como un difusor subsónico: $M < 1$ en la garganta, $P_B/P_0 < 1$, pero $P_B/P_0 > P^*/P_0$

Punto c: la sección divergente actúa como un difusor subsónico: $M = 1$ en la garganta, $P_B/P_0 > P^*/P_0$ y $M_E < 1$.

Punto d: la sección divergente actúa como una tobera supersónica: $M = 1$ en la garganta, $P_B/P_0 < P^*/P_0$ y $M_E > 1$.

Punto e: Cuando P_B desciende por debajo del punto d, (punto e) la presión de salida permanece constante y la caída de presión de P_E a P_B ocurre fuera de la tobera.la sección divergente actúa como una tobera supersónica y $M = 1$ en la garganta.

Entre las presiones de succión (P_B) designadas por los puntos c y d, no hay solución isoentrópica posible, ya que aparecerán ondas de choque.