

FORMULARIO:

Pares y

Propiedades de las Transformada de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$		$\mathcal{L}\{g(t)\}$	$G(s) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} g(t) e^{-st} dt$
1	$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	1	$\mathcal{L}\{af_1(t) \pm bf_2(t)\}$	$aF_1(s) \pm bF_2(s)$
2	$\delta(t)$	1	2	$\mathcal{L}\{f(at)\}$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$
3	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	3*	$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}$	$e^{-as} F(s), \quad a \geq 0$
4	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	4	$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\}$	$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$
5*	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	5	$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}$	$F(s+a)$
6	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	6	$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	7	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8*	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	8	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}$	$\frac{F(s)}{s}$
9	$\text{sen}(wt)$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$	9	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$	$\int_s^\infty F(s) ds, \quad \text{si } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ existe}$
10	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	10	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
11	$\text{senh}(wt)$	$\frac{w}{s^2 - w^2}$	11	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
12	$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2 - w^2}$			

Nota: Los pares y propiedades identificados con un super-índice asterisco deben ser usadas en la operación de la transformada de Laplace inversa.

Otras formulas importantes

$\text{sen}(\alpha \pm \beta)$	$\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \text{sen}(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta)$	$\cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$
$e^{\pm jw}$	$\cos(w) \pm j \text{sen}(w)$
$\cos(w)$	$\frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2}$
$\text{sen}(w)$	$\frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j}$
$\cosh(x)$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\text{senh}(x)$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\frac{D}{d}$	$c + \frac{r}{d}$
A_k	$\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} ((s+a)^r F(s)) \Big _{s=-a}, \text{ para } k = 1, 2, \dots, r$
$\mathcal{L}\left\{\frac{M}{w} e^{-at} \text{sen}(wt + \phi)\right\}$	$\frac{M \angle \phi}{(s+a)^2 + w^2}$
$M \angle \phi$	$F(s) \left[(s+a)^2 + w^2 \right] \Big _{s=-a+jw}$

Reglas para obtener la transformada de Laplace directa

Asumiendo la función $f(t) = f_1(t) f_2(t) \dots f_n(t)$

- 1.- Si alguna de las funciones $f_k(t)$ es igual a $u(t-a)$, use la propiedad $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$.
- 2.- Si la función se puede descomponer en una suma, tome cada sub-función como un problema independiente y use la propiedad #1. $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$
- 3.- Usando las propiedades comenzado con la más sencilla o fácil de aplicar descomponga $f(t)$ en funciones auxiliares hasta obtener una función que se encuentre en la tabla de pares de transformadas de Laplace.
- 4.- Para finalizar use el par de transformada sobre la función auxiliar y substituya hacia atrás hasta obtener $F(s)$.
- 4.1.- El par usado corresponderá a la sub-función $f_k(t)$ que no tenga asociada alguna propiedad.
- 4.2.- Si todas las funciones $f_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) tienen asociadas alguna propiedad, el par usado corresponderá a la función $f_k(t)$ que tenga la propiedad más complicada.
- 4.3.- Si la función para la cual existe un par no está en la forma que aparece en la tabla, haga las manipulaciones algebraicas o trigonométricas necesarias para ajustarla a la tabla.
- 4.4.- Se debe usar **sólo** un par.

Reglas para obtener la transformada de Laplace inversa

- 1.- Se reconoce las propiedades de la transformada de Laplace en $F(s)$ y se descompone $F(s)$ en funciones auxiliares, al remover esas propiedades. (ejemplo: e^{-as}), hasta obtener una función racional de s .
- 2.- Hacer mónico el denominador de $G(s)$; es decir, el coeficiente de máximo orden es uno.
- 3.- Calcular los ceros y polos de $G(s)$ y cancelar los términos comunes.
- 4.- Verificar si $G(s)$ es estrictamente propia, es decir, el orden del polinomio del denominador es mayor que el orden del polinomio del numerador.
- 5.- Si $G(s)$ no es estrictamente propia, se calcula $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = C(s) + \frac{R(s)}{D(s)} = G_1(s) + G_2(s)$, usando la técnica de división de polinomios.
- 6.- Si $G(s)$ es estrictamente propia se expande en fracciones parciales. Si $G(s)$ no es estrictamente propia, la expansión sólo se hace para $G_2(s)$.
- 7.- Se obtiene la "forma" de $g(t)$, usando la inversa de los pares y las propiedades de la transformada de Laplace. $(g(t) = g_1(t) + g_2(t))$
- 8.- Se calcula el valor de los residuos para polos simples (K_i), polos múltiples (A_i) y polos conjugados ($M_i|\phi_i$).