Capítulo 2

Linealización de Modelos

Debido a que la mayoría de herramientas para el análisis de sistemas y diseño de sistemas de control requieren que el modelo sea lineal, es necesario entonces disponer de métodos para linealizar modelos.

La linealización generalmente consiste en una expansión en series de Taylor de la ecuación de estado (no-lineal) alrededor de un punto de operación definido naturalmente por el sistema o seleccionado arbitrariamente para satisfacer alguna necesidad de control.

2.1 Expansión en Series Infinitas

Cuando un modelo es muy complejo matemáticamente es necesario recurrir a técnicas como las representaciones en series infinitas. Las soluciones en series infinitas son usadas generalmente para aproximar el valor de una función en un punto arbitrario con cierto grado de precisión.

2.2 Expansión en Series de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x_0} (x - x_0)^k \tag{2.1}$$

Donde $f(x)$ es la expansión alrededor del punto x_0.

2.3 Derivada de una función escalar por un vector

Dados: $f(\mathbf{x}) : 1{\times}1$ y $\mathbf{x} : m \times 1$

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

2.4 Derivada de una función vectorial por un escalar

Dados: $\mathbf{f}(x) : n \times 1$ y $x : 1 \times 1$

$$\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

2.5 Derivada de una función vectorial por un vector

Dados: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : n \times 1$ y $\mathbf{x} : m \times 1$

$$\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.6 Modelo escalar no-lineal de una variable de estado

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \tag{2.5}$$

Aproximando $f(x(t))$ por una expansión en series de Taylor alrededor de un punto de operación x_{op}

$$f(x(t)) = f(x_{op}) + \left.\frac{df(\cdot)}{dx}\right|_{x_{op}} (x - x_{op}) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f(\cdot)}{dx^2}\right|_{x_{op}} (x - x_{op})^2 + t.o.s. \tag{2.6}$$

Despreciando los términos de segundo orden y los de orden superior ($t.o.s.$), se tiene:

$$f(x(t)) \simeq f(x_{op}) + \left.\frac{df(\cdot)}{dx}\right|_{x_{op}} (x - x_{op}) \tag{2.7}$$

El punto de operación debe satisfacer la condición de ser un punto de equilibrio de la ecuación de estado, es decir

$$f\left(x_{op}\right) = 0 \tag{2.8}$$

En este caso los puntos de operación no son arbitrarios.
Se define la variable $x_\delta = x - x_{op}$, entonces

$$\frac{dx_\delta}{dt} = \frac{dx}{dt} = \left.\frac{df\left(\cdot\right)}{dx}\right|_{x_{op}} \left(x - x_{op}\right) = \left.\frac{df\left(\cdot\right)}{dx}\right|_{x_{op}} x_\delta \tag{2.9}$$

Definiendo $A \triangleq \left.\frac{df\left(\cdot\right)}{dx}\right|_{x_{op}}$ y re-escribiendo la ecuación (2.9) se tiene:

$$\frac{dx_\delta}{dt} = Ax_\delta \tag{2.10}$$

2.7 Modelo escalar no-lineal de una variable de estado y una variable de entrada

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt} = f\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right) \tag{2.11}$$

Aproximando $f\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right)$ por una expansión en series de Taylor alrededor de un punto de operación x_{op}, u_{op}

$$\begin{aligned} f\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right) = f\left(x_{op}, u_{op}\right) + \left.\frac{\partial f\left(\cdot\right)}{\partial x}\right|_{x_{op},u_{op}} \left(x - x_{op}\right) + \left.\frac{\partial f\left(\cdot\right)}{\partial u}\right|_{x_{op},u_{op}} \left(u - u_{op}\right) + \\ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f\left(\cdot\right)}{\partial x^2}\right|_{x_{op},u_{op}} \left(x - x_{op}\right)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f\left(\cdot\right)}{\partial u^2}\right|_{x_{op},u_{op}} \left(u - u_{op}\right)^2 \\ + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f\left(\cdot\right)}{\partial x \partial u}\right|_{x_{op},u_{op}} \left(x - x_{op}\right)\left(u - u_{op}\right) + t.o.s. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Truncando la serie después de los términos de primer orden se tiene:

$$f\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right) = f\left(x_{op}, u_{op}\right) + \left.\frac{\partial f\left(\cdot\right)}{\partial x}\right|_{x_{op},u_{op}} \left(x - x_{op}\right) + \left.\frac{\partial f\left(\cdot\right)}{\partial u}\right|_{x_{op},u_{op}} \left(u - u_{op}\right) \tag{2.13}$$

Además el punto de operación debe satisfacer la condición $f\left(x_{op}, u_{op}\right) = 0$, donde x_{op} generalmente puede ser seleccionado arbitrariamente ajustando el valor de la entrada u_{op}.

Definiendo
$A \triangleq \left.\frac{\partial f\left(\cdot\right)}{\partial x}\right|_{x_{op},u_{op}}$, $B \triangleq \left.\frac{\partial f\left(\cdot\right)}{\partial u}\right|_{x_{op},u_{op}}$, $x_\delta\left(t\right) = x\left(t\right) - x_{op}$ y $u_\delta\left(t\right) = u\left(t\right) - u_{op}$

Entonces se tiene:

$$\frac{dx_\delta(t)}{dt} = Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t) \tag{2.14}$$

Si además se tiene un señal de salida

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \tag{2.15}$$

Aproximando la función no-lineal $g(x(t), u(t))$ por una expansión en series de Taylor y truncando los términos de orden superior se tiene:

$$g(x(t), u(t)) = g(x_{op}, u_{op}) + \left.\frac{\partial g(\cdot)}{\partial x}\right|_{x_{op},u_{op}} (x - x_{op}) + \left.\frac{\partial g(\cdot)}{\partial u}\right|_{x_{op},u_{op}} (u - u_{op}) \tag{2.16}$$

Definiendo
$C \triangleq \left.\dfrac{\partial g(\cdot)}{\partial x}\right|_{x_{op},u_{op}}$, $D \triangleq \left.\dfrac{\partial g(\cdot)}{\partial u}\right|_{x_{op},u_{op}}$, $y_{op} = g(x_{op}, u_{op})$ $y_\delta(t) = y(t) - y_{op}$
Entonces se tiene:

$$y_\delta(t) = Cx_\delta + Du_\delta \tag{2.17}$$

2.8 Modelo con múltiples estados, múltiples entradas y múltiples salidas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{q-1}(t) \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \\ \vdots \\ g_{q-1}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \\ g_q(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Usando notación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{2.20}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{2.21}$$

Extendiendo al caso vectorial la expansión en series de Taylor hecha para el caso escalar se tiene:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta}\left(t\right)=\mathbf{A}\mathbf{x}_{\delta}\left(t\right)+\mathbf{B}\mathbf{u}_{\delta}\left(t\right) \tag{2.22}$$

$$\mathbf{y}_{\delta}\left(t\right)=\mathbf{C}\mathbf{x}_{\delta}\left(t\right)+\mathbf{D}\mathbf{u}_{\delta}\left(t\right) \tag{2.23}$$

Donde:

$$\mathbf{x}_{\delta}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_{op} \quad , \quad \mathbf{u}_{\delta}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_{op} \quad , \quad \mathbf{y}_{\delta}=\mathbf{y}-\mathbf{y}_{op} \quad , \quad \mathbf{y}_{op}=\mathbf{g}\left(\mathbf{x}_{op},\mathbf{u}_{op}\right)$$

$$\mathbf{A}=\left.\frac{d\mathbf{f}\left(\cdot\right)}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_{op},\mathbf{u}_{op}} \qquad (dim(\mathbf{A})=n\times n)$$

$$\mathbf{B}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}\left(\cdot\right)}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_{op},\mathbf{u}_{op}} \qquad (dim(\mathbf{B})=n\times m)$$

$$\mathbf{C}=\left.\frac{\partial\mathbf{g}\left(\cdot\right)}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_{op},\mathbf{u}_{op}} \qquad (dim(\mathbf{C})=q\times n)$$

$$\mathbf{D}=\left.\frac{\partial\mathbf{g}\left(\cdot\right)}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_{op},\mathbf{u}_{op}} \qquad (dim(\mathbf{D})=q\times m)$$

2.9 Ejemplo de linealización

Tanque:

$$\frac{dm_{vc}\left(t\right)}{dt}=\dot{m}_{i}\left(t\right)-\dot{m}_{o}\left(t\right) \tag{2.24}$$

Asumiendo que la densidad del fluido es constante y que el área transversal del tanque es constante se tiene:

$$m\left(t\right)=\rho V\left(t\right) \tag{2.25}$$

$$V\left(t\right)=\mathcal{A}h\left(t\right) \tag{2.26}$$

$$\dot{m}\left(t\right)=\rho F\left(t\right) \tag{2.27}$$

Donde:

m : masa.
ρ : densidad.
V : volumen.
$\mathcal{A}$: área transversal.
h : nivel.
F : flujo.
Substituyendo se tiene:

$$\frac{dm_{vc}(t)}{dt} = \rho\frac{dV(t)}{dt} = \rho\mathcal{A}\frac{dh(t)}{dt} \tag{2.28}$$

Finalmente

$$\mathcal{A}\frac{dh(t)}{dt} = F_i(t) - F_o(t) \tag{2.29}$$

Si a la salida el flujo es turbulento y ocurre a través de una obstrucción se tiene

$$F_o(t) = C_d\sqrt{h(t)} \tag{2.30}$$

Substituyendo

$$\mathcal{A}\frac{dh(t)}{dt} = F_i(t) - C_d\sqrt{h(t)} \tag{2.31}$$

Si se selecciona como salida el nivel del tanque se tiene que la realización física no-lineal que representa el sistema es

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) = -\frac{C_d}{\mathcal{A}}\sqrt{x(t)} + \frac{1}{\mathcal{A}}u(t) \tag{2.32}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) = x(t) \tag{2.33}$$

Donde:
$x(t)$: $h(t)$
$u(t)$: $F_i(t)$
$y(t)$: $h(t)$
Si se desea controlar la salida (el nivel) alrededor un setpoint, $x_{op} = h_{ref}$.
Se procede de la siguiente manera:
$y_{op} = h_{ref} \;\rightarrow\; x_{op} = h_{ref} \;\rightarrow\; u_{op} = Cd\sqrt{h_{ref}}$
Nota: Para calcular el valor de u_{op} se debe recordar que

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{x_{op},u_{op}} = 0 \tag{2.34}$$

Conociendo los valores que definen el punto de operación se tiene:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}\right|_{x_{op},u_{op}} = -\frac{C_d}{2\mathcal{A}}x(t)^{-1/2}\Big|_{x_{op},u_{op}} = -\frac{C_d\sqrt{h_{ref}}}{2\mathcal{A}h_{ref}} \tag{2.35}$$

$$\mathbf{B} = \left.\frac{\partial f(\cdot)}{\partial u}\right|_{x_{op},u_{op}} = \left.\frac{1}{\mathcal{A}}\right|_{x_{op},u_{op}} = \frac{1}{\mathcal{A}} \tag{2.36}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial g(\cdot)}{\partial x}\right|_{x_{op},u_{op}} = 1|_{x_{op},u_{op}} = 1 \tag{2.37}$$

$$\mathbf{D} = \left.\frac{\partial g(\cdot)}{\partial u}\right|_{x_{op},u_{op}} = 0|_{x_{op},u_{op}} = 0 \tag{2.38}$$

Estas operaciones permiten escribir la siguiente realización linealizada

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{2.39}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \tag{2.40}$$

2.10 Ejercicio

Linealize el sistema dado de manera tal que el punto de operación permita que el setpoint sea $y_{ref} = 2$ unidades. Construya la realización que representa al sistema linealizado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^3 - 5x_1x_2 + e^{u_1} \\ 7u_1x_2 - x_1^2x_3^2 \\ \sqrt{x_3} - 2x_1^3 + \ln(x_1) \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$y(t) = x_1x_3 \tag{2.42}$$

Sugerencia: use la función *fzero.m* de *MATLAB.*