Modelos en el Espacio de Estado

Introducción: La tendencia moderna en la ingeniería de sistemas es hacia una complejidad cada vez mayor, debido principalmente a la complejidad de las tareas y a los estrictos requisitos de precisión. Los sistemas complejos pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas y pueden ser variantes en el tiempo.

Todos estos argumentos imponen múltiples requerimientos modelado que no son resueltos convenientemente con las herramientas que proporciona el modelado clásico, la alternativa es entonces el modelado basado en variables de estado, el cual ha sido desarrollado desde los años 60, pero que solo recientemente ha cobrado importancia debido a la facilidad para accesar computadores cada vez más rápidos, confiables y económicos. El concepto de estado realmente no es un concepto nuevo ya que ha sido usado por largo tiempo en el campo de la dinámica clásica entre otros.

La teoría basada en variables de estado contrasta con la teoría clásica o convencional basada en la transformada de Laplace, en que el primero es aplicable a sistemas los cuales pueden ser lineales o nolineales, invariantes o variantes en el tiempo, con simple o múltiple entradas y simple o múltiple salidas, mientras que el segundo en general es aplicado sólo a sistemas lineales, invariantes en el tiempo con una entrada y una salida.

Estado: se refiere a las condiciones pasadas, presentes y futuras de un sistema. En general, el estado puede ser descrito por un conjunto de números, una curva, una ecuación, etc.

Variables de Estado: se definen como el conjunto mínimo de variables $x_1(t), x_2(t), , x_n(t)$, tales que su conocimiento en cualquier tiempo t_0 y la información sobre la señal de entrada aplicada subsecuentemente al tiempo t_0 son suficientes para determinar el estado del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$. Las variables de estado no necesitan tener un significado físico y si lo tienen no requieren ser cantidades medibles lo cual proporciona bastante libertad para seleccionarlas.

Estado Inicial: es definido por las variables de estado $x_1(t_0), x_2(t_0), , x_n(t_0)$ para cualquier tiempo inicial $t = t_0$.

Vector de Estado: Es el vector que contiene como componentes las n variables de estado necesarias para describir el comportamiento de un sistema dinámico.

Espacio de Estado: Es el espacio n-dimensional cuyas ejes de coordenadas consiste de los ejes x_1, x_2, , x_n. Cualquier estado puede representarse como un punto en este espacio.

Salidas del Sistema: son las variables que en general pueden ser medidas y en el caso de sistemas de control son las variables seleccionadas para ser controladas. En general, las salidas de un sistema se pueden representar como la combinación lineal de variables de estado.

Ecuaciones de Estado: son ecuaciones diferenciales de primer orden usadas para modelar sistemas dinámicos.

En general, una ecuación diferencial de orden n puede ser descompuesta en n ecuaciones diferenciales de primer orden. Debido a que, en principio, las ecuaciones diferenciales de primer orden son más sencillas de resolver que las de orden superior, se justifica entonces este tipo de descomposición.

Un sistema un general se puede representar como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}\left(t\right)=\mathbf{g}\left(\mathbf{x},\mathbf{u},t\right) \tag{2}$$

Donde la ecuación (1) es la ecuación de estado y la ecuación (2) es la ecuación de salida. Si los vectores de funciones $\mathbf{f}$ o $\mathbf{g}$ presentan el tiempo t explícitamente, el sistema recibe el nombre de variante en el tiempo.

Si las ecuaciones (1) y (2) son linealizadas alrededor del punto de operación o si el sistema es originalmente lineal se obtiene la siguiente ecuación de estado y ecuación de salida:

$$\dot{\mathbf{x}}\left(t\right)=\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{x}\left(t\right)+\mathbf{B}\left(t\right)\mathbf{u}\left(t\right) \tag{3}$$

$$\mathbf{y}\left(t\right)=\mathbf{C}\left(t\right)\mathbf{x}\left(t\right)+\mathbf{D}\left(t\right)\mathbf{u}\left(t\right) \tag{4}$$

Donde $\mathbf{A}\left(t\right)$ es la matriz de estado, $\mathbf{B}\left(t\right)$ es la matriz de entrada, $\mathbf{C}\left(t\right)$ es la matriz de salida y $\mathbf{D}\left(t\right)$ es la matriz de transmisión directa. Un diagrama de bloques representando las ecuaciones (3) y (4) se muestra en la Figura 1.

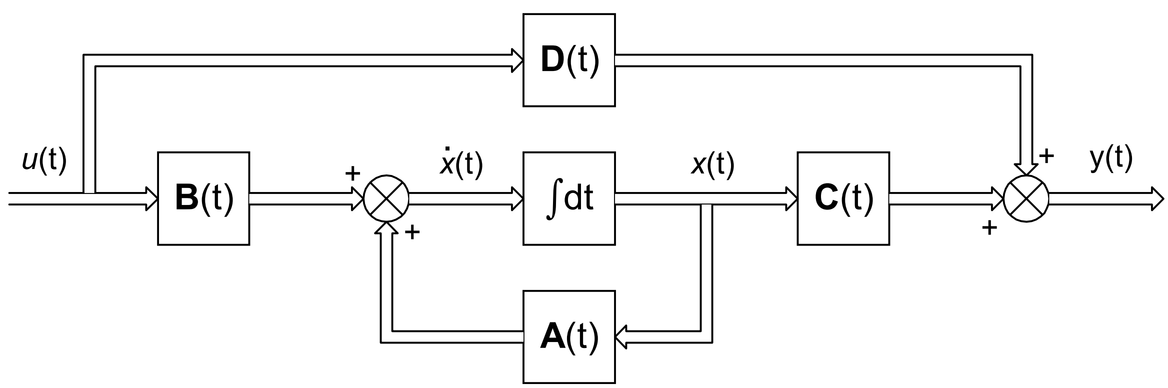

Figura 1: Sistema Lineal en Espacio de Estado

Si el además de ser lineal el sistema también es invariante en el tiempo, las ecuaciones (3) y (4) pueden ser simplificadas a:

$$\dot{\mathbf{x}}\left(t\right)=\mathbf{A}\mathbf{x}\left(t\right)+\mathbf{B}\mathbf{u}\left(t\right) \tag{5}$$

$$\mathbf{y}\left(t\right)=\mathbf{C}\mathbf{x}\left(t\right)+\mathbf{D}\mathbf{u}\left(t\right) \tag{6}$$

Realización Controlable o Forma Fase-Variable Canónica

Dada la ecuación diferencial mónica:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u(t) \tag{7}$$

Definiendo el operador

$$D^k = \frac{d^k}{dt^k} \tag{8}$$

Se tiene:

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y(t) = \left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \ldots + b_{n-1} D + b_n\right) u(t) \tag{9}$$

o

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \ldots + b_{m-1} D + b_m}{D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n} \tag{10}$$

Caso $0 \leq m < n$ (función estrictamente propia)
Definiendo la variable auxilar $z(t)$

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \left(\frac{b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \ldots + b_{m-1} D + b_m}{D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n}\right)\left(\frac{z(t)}{z(t)}\right) \tag{11}$$

Asignando arbitrariamente

$$u(t) = \left(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) z(t) \tag{12}$$

$$u(t) = \frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n z(t) \tag{13}$$

Definiendo las variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t) \\ x_2(t) &= \frac{dz(t)}{dt} = \dot{x}_1(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} = \dot{x}_{n-1}(t) \end{aligned} \tag{14}$$

Re-escribiendo la ecuación (13) se obtiene:

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -a_n x_1(t) - \cdots - a_1 x_n(t) + u(t) \tag{15}$$

Agrupando la información de las ecuaciones (14) y (15) se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{16}$$

Donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De la misma manera:

$$y(t) = \left(b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + ... + b_{m-1} D + b_m\right) z(t) \tag{17}$$

$$y(t) = b_0 \frac{d^m z(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} z(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m z(t) \tag{18}$$

Re-escribiendo la ecuación (18) se obtiene:

$$y(t) = b_m x_1(t) + \cdots + b_1 x_m(t) + b_0 x_{m+1}(t) \tag{19}$$

De la ecuación (19) se obtiene:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{20}$$

Donde:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_m & \cdots & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \\ x_{m+1}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Notas:
a) $n > m$
b) El número de ceros en la matriz $\mathbf{C}$ despues de b_0 es igual a $n - m - 1$.

El diagrama de flujo de señales que representa a las ecuaciones (16) y (20) se muestra en la Figura 2.

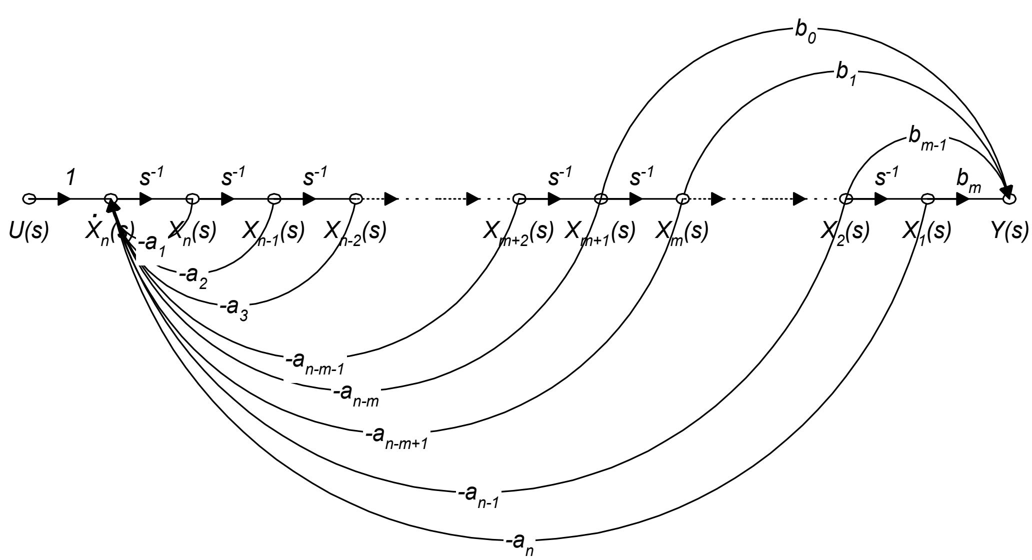

Figura 2

Caso $m = n$ (función propia, pero no **estrictamente** propia)

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \left(\frac{b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + ... + b_{n-1} D + b_n}{D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n} \right) \tag{21}$$

Dividiendo el polinomio del numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{cccc|cccc} b_0 D^n & +b_1 D^{n-1} & \cdots & +b_n & D^n & +a_1 D^{n-1} & +\cdots & +a_n \\ \hline -b_0 D^n & -b_0 a_1 D^{n-1} & -\cdots & -b_0 a_n & b_0 & & & \\ 0 & (b_1 - b_0 a_1) D^{n-1} & +\cdots & +b_n - b_0 a_n & & & & \end{array}$$

Definiendo

$$\beta_i = b_i - b_0 a_i \tag{22}$$

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \left(\frac{\beta_1 D^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} D + \beta_n}{D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n} \right) + b_0 \tag{23}$$

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_1(t)}{u(t)} + \frac{y_2(t)}{u(t)} \tag{24}$$

Donde

$$\frac{y_2(t)}{u(t)} = b_0 \tag{25}$$

o

$$y_2(t) = b_0 u(t) \tag{26}$$

y

$$\frac{y_1(t)}{u(t)} = \frac{\beta_1 D^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} D + \beta_n}{D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n} \tag{27}$$

es igual al caso anterior $(0 \leq m < n)$
Lo que implica que en este caso la realización es:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{28}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{29}$$

Donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \cdots & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo de señales que representa a las ecuaciones (28) y (29) se muestra en la Figura 3.

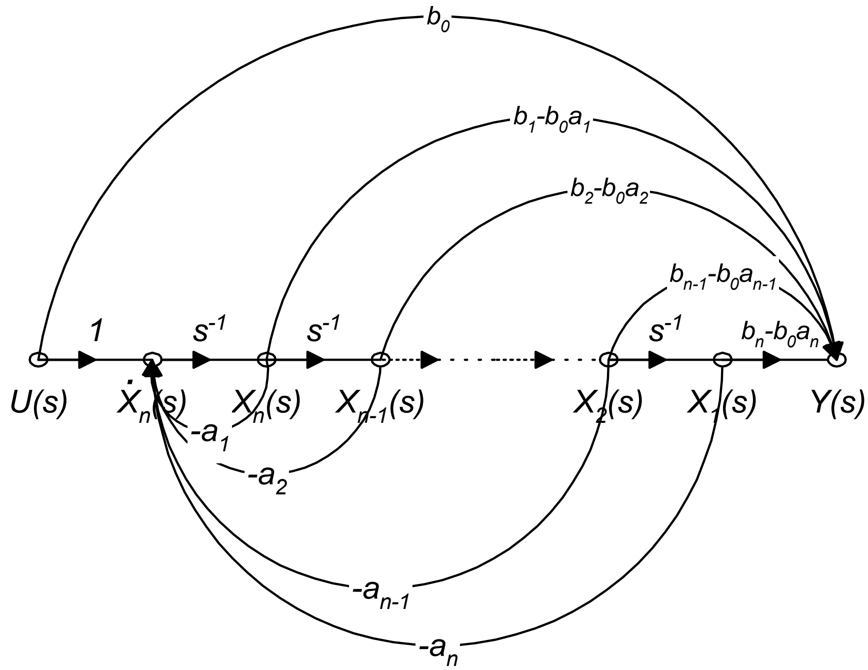

Figura 3

Realización Observable

Caso $0 \leq m < n$ (función estrictamente propia)

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n\right) y(t) = \left(b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + ... + b_{m-1}D + b_m\right) u(t) \tag{30}$$

Se despeja el término $D^n y(t)$, al otro lado de la ecuación se agrupan los demás términos en pares con el mismo orden comenzando con los términos de orden $n-1$ y después se divide toda la ecuación por D^n.

$$y(t) = \frac{-a_1 y(t)}{D} + \cdots + \frac{-a_{n-m} y(t) + b_0 u(t)}{D^{n-m}} + \cdots + \frac{-a_n y(t) + b_m u(t)}{D^n} \tag{31}$$

Definiendo

$$y(t) = \frac{1}{D}\left[-a_1 y(t) + \frac{1}{D}\left[\cdots + \frac{1}{D}\left[-a_{n-m} y(t) + b_0 u(t) + \frac{1}{D}\left[\cdots + \frac{1}{D}\left[-a_n y(t) + b_m u(t)\right]\right]\right]\right]\right] \tag{32}$$

Comenzando desde el corchete interior se define

$$\dot{x}_1 = -a_n y(t) + b_m u(t) \tag{33}$$

y así sucesivamente se tiene que:

$$y(t) = x_n \tag{34}$$

Nota: $\frac{1}{D} = \int$

Sustituyendo $y(t) = x_n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = -a_n x_n(t) + b_m u(t) \\
&\dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_{n-1} x_n(t) + b_{m-1} u(t) \\
&\vdots \\
&\dot{x}_{m+1}(t) = x_m(t) - a_{n-m} x_n(t) + b_0 u(t) \\
&\dot{x}_{m+2}(t) = x_{m+1}(t) - a_{n-m-1} x_n(t) \\
&\vdots \\
&\dot{x}_n(t) = x_{n-1} - a_1 x_n(t)
\end{aligned} \tag{35}$$

De las ecuaciones de estado (35) se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{36}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \tag{37}$$

Donde:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-m} \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo de señales que representa a la ecuación (31) se muestra en la Figura 4.

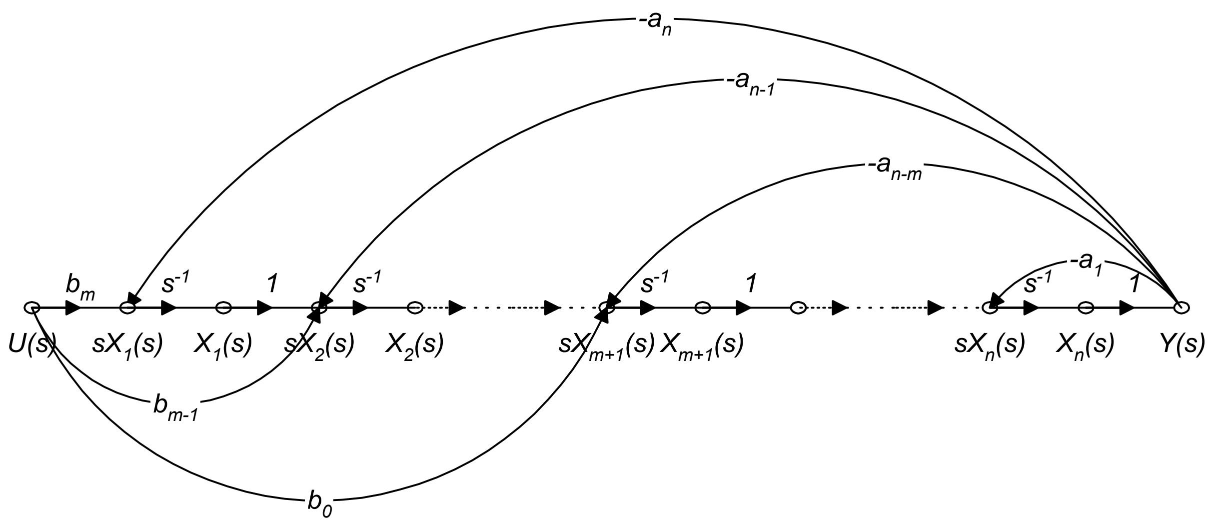

Figura 4

Caso $m=n$ (función propia, pero no **estrictamente** propia)

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n\right) y(t) = \left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + ... + b_{n-1} D + b_n\right) u(t) \tag{38}$$

Dividiendo el polinomio del numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{cccc|cccc} b_0 D^n & +b_1 D^{n-1} & \cdots & +b_n & D^n & +a_1 D^{n-1} & +\cdots & +a_n \\ \hline -b_0 D^n & -b_0 a_1 D^{n-1} & -\cdots & -b_0 a_n & b_0 & & & \\ 0 & (b_1 - b_0 a_1) D^{n-1} & +\cdots & +b_n - b_0 a_n & & & & \end{array}$$

Definiendo

$$\beta_i = b_i - b_0 a_i \tag{39}$$

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \left(\frac{\beta_1 D^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} D + \beta_n}{D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n}\right) + b_0 \tag{40}$$

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_1(t)}{u(t)} + \frac{y_2(t)}{u(t)} \tag{41}$$

Donde

$$\frac{y_2(t)}{u(t)} = b_0 \tag{42}$$

o

$$y_2(t) = b_0 u(t) \tag{43}$$

y

$$\frac{y_1(t)}{u(t)} = \frac{\beta_1 D^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} D + \beta_n}{D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n} \tag{44}$$

es igual al caso anterior $(0 \leq m < n)$
Lo que implica que en este caso la realización es:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{45}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{46}$$

Donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo de señales que representa a la ecuación (**??**) se muestra en la Figura 5.

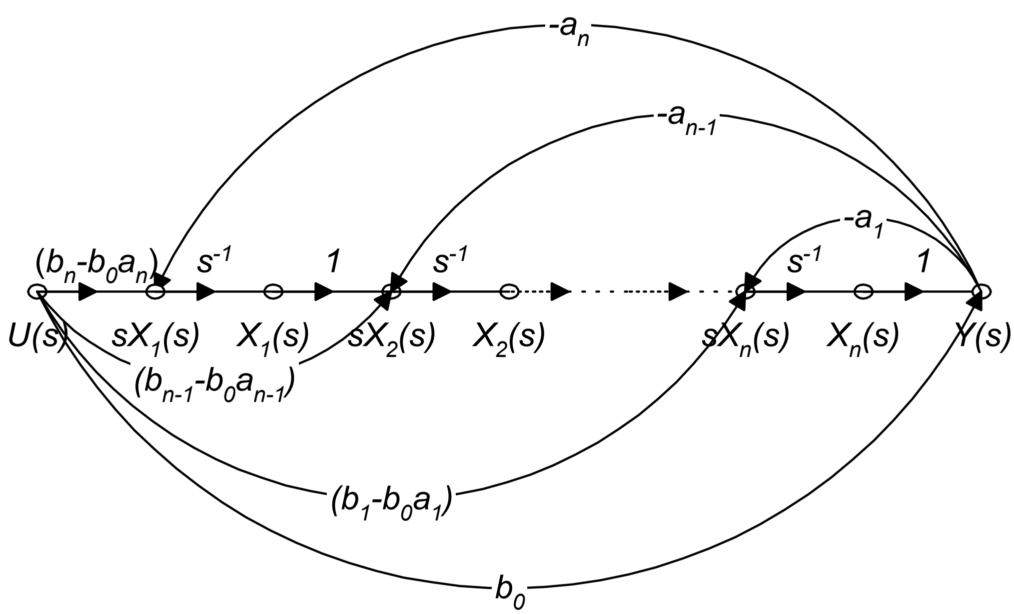

Figura 5