Ondas de Choque en Toberas

Características de una tobera convergente-divergente cuando se presentan las ondas de choque.

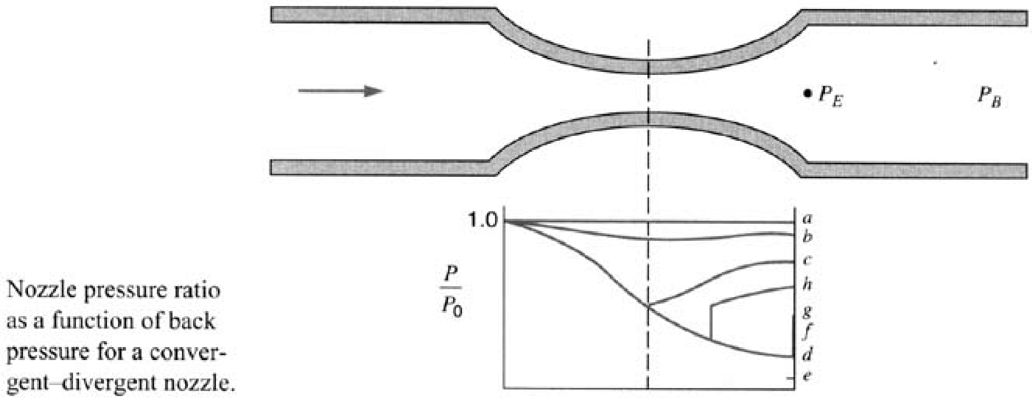

Figura 1

Punto d: $P_E = P_B$ y se ha mantenido el flujo isentrópico.

Punto f: la presión P_E en el plano de salida, no se ve afectada por el aumento de presión desde el punto d hasta este punto. El aumento de P_E a P_B ocurre fuera de la tobera.

Punto g: su valor de contrapresión es justo el necesario para originar un choque normal permanente en el plano de salida de la tobera. P_E en el plano de salida (flujo abajo del choque), es igual a la contrapresión P_B y $M < 1$ a la salida de la tobera.

Punto h: al subir la contrapresión del punto g al punto h, el choque normal se mueve dentro de la tobera.

ECUACIONES A UTILIZAR:

Para flujo isentrópico de un gas ideal :

$$\dot{m} = \rho A V \tag{1}$$

$$P = \rho R T \tag{2}$$

$$C = \sqrt{KRT} \tag{3}$$

$$M = \frac{V}{C} \tag{4}$$

Donde:

- $\dot{m}$: flujo másico
- ρ : densidad
- A : área
- V : velocidad
- R : constante del gas
- P : presión
- T : temperatura
- C : velocidad del sonido
- K : razón de los calores específicos
- M : número de mach.

Expresiones para las propiedades de estancamiento isentrópico local de un gas ideal.

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \frac{K-1}{2}M^2\right]^{\frac{K}{K-1}} \tag{5}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{K-1}{2}M^2 \tag{6}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}\left[1 + \frac{K-1}{2}M^2\right]^{\frac{1}{K-1}} \tag{7}$$

Donde:

P_0 : presión de estancamiento.
T_0 : temperatura de estancamiento.
ρ_0 : densidad de estancamiento.

Para la condición crítica $M = 1$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1 + \frac{K-1}{2}M^2}{1 + \frac{K-1}{2}}\right]^{\dfrac{K+1}{2(K-1)}} \tag{8}$$

Ecuaciones para onda de choque normal en el flujo de un gas ideal que fluye a través de una tobera:

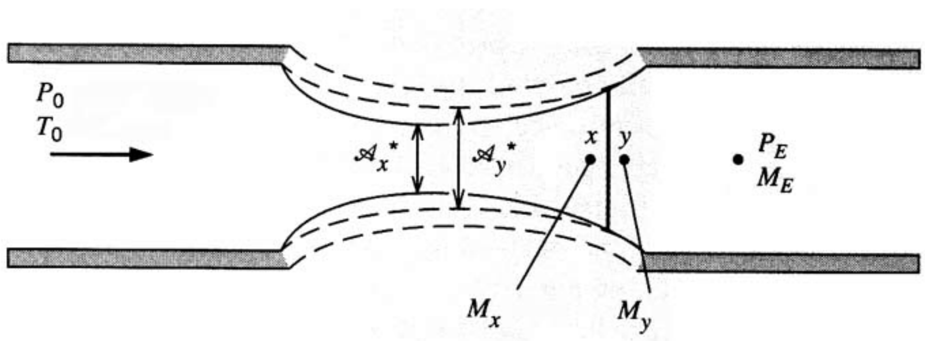

Figura 2

$$T_{0x} = T_{0y} \tag{9}$$

Nota: los subíndices x y y se usan para indicar las condiciones flujo arriba y flujo abajo de la onda de choque, respectivamente.

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{1 + \frac{K-1}{2}M_x^2}{1 + \frac{K-1}{2}M_y^2} \tag{10}$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2\left(\frac{M_y}{M_x}\right)^2 \tag{11}$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{M_x\sqrt{1 + \frac{K-1}{2}M_x^2}}{M_y\sqrt{1 + \frac{K-1}{2}M_y^2}} \tag{12}$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{1 + KM_x^2}{1 + KM_y^2} \tag{13}$$

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \dfrac{2}{K-1}}{\dfrac{2K}{K-1}M_x^2 - 1} \tag{14}$$

$$\frac{P_{0y}}{P_{0x}} = \left(\frac{P_y}{P_x}\right)\left(\frac{T_y}{T_x}\right)^{\dfrac{K}{1-K}} \tag{15}$$

PROBLEMA

Una tobera convergente - divergente tiene una relación de área de salida / área de la garganta de 2. Entra aire a la garganta con una presión de estancamiento de $360K$ El área de la garganta es 500 mm^2.

Determine:

1. La velocidad y la presión del aire a la salida, si la parte divergente actúa como tobera y el proceso es isentrópico (P_d) .
2. La velocidad y la presión del aire a la salida, si la parte divergente actúa como difusor y el proceso es isoentrópico (P_c).
3. La velocidad y la presión del aire a la salida, si se produce una onda de choque justo en la salida (P_g) .
4. La velocidad y la presión del aire a la salida y en la garganta; determine también el valor de M_x y M_y cuando se presenta onda de choque, si se sabe que la contrapresión (P_B) es:
   (a) $50kPa$
   (b) $200kPa$
   (c) $400kPa$
   (d) $600kPa$
   (e) $800kPa$
   (f) $950kPa$.

DATOS
$A_E/A^* = 2.0$
$A^* = 500mm^2 = 0.0005m^2$
$P_0 = 1000kPa$
$T_0 = 360K$

CALCULOS
1.- $P_E = ?$ $V_E = ?$
$M > 1$ (flujo supersónico) Representa el punto d en Figura 1
Flujo isoentrópico.
Despejando el valor de M de la ecuación (8) con $K = 1.4$ y $\dfrac{A}{A^*} = 2$ se obtiene:

$$M_E = 2.197 \tag{16}$$

$$M_E = 0.3079 \tag{17}$$

Como en este caso la sección divergente está actuando como tobera, $M > 1$ y se selecciona el valor de $M_E = 2.197$. Resolviendo para el valor de $\frac{P_0}{P_E}$ de la ecuación (5) con $K = 1.4$ y $M_E = 2.197$ se obtiene:

$$\frac{P_0}{P_E} = 10.64 \tag{18}$$

$$P_E = \frac{P_0}{10.64} = \frac{1000kPa}{10.64} \rightarrow P_E = 93.98kPa \tag{19}$$

Resolviendo para el valor de $\frac{T_0}{T_E}$ de la ecuación (6) con $K = 1.4$ y $M_E = 2.197$ se obtiene:

$$\frac{T_0}{T_E} = 1.9654 \tag{20}$$

$$T_E = \frac{T_0}{1.9654} = \frac{360K}{1.9654} \rightarrow T_E = 183.17K \tag{21}$$

Resolviendo para el valor de C_E de la ecuación (3) se obtiene:

$$C_E = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(183.17K)} = 271.29m/s \tag{22}$$

Despejando para el valor de V_E de la ecuación (4) se obtiene:

$$V_E = M_E C_E \rightarrow V_E = (2.197)\,(271.29m/s) \rightarrow V_E = 596.02m/s \tag{23}$$

2.- $P_E = ?$ $\quad V_E = ?$
$M < 1$ (flujo subsónico) Representa el punto c en Figura 1
Flujo isoentrópico.
Despejando el valor de M de la ecuación (8) con $K = 1.4$ y $\frac{A}{A^*} = 2$ se obtiene:

$$M_E = 2.197 \tag{24}$$

$$M_E = 0.3079 \tag{25}$$

Como en este caso la sección divergente está actuando como difusor, $M < 1$ y se selecciona el valor de $M_E = 0.3079$ Resolviendo para el valor de $\frac{P_E}{P_0}$ de la ecuación (5) se obtiene:

$$\frac{P_E}{P_0} = 0.9360 \tag{26}$$

$$P_E = 0.9360 P_0 = 0.9360\,(1000Kpa) \rightarrow P_E = 936kPa \tag{27}$$

Resolviendo para el valor de $\frac{T_E}{T_0}$ de la ecuación (6) se obtiene:

$$\frac{T_E}{T_0} = 0.9813 \tag{28}$$

$$T_E = 0.9813 T_0 = 0.9813\,(360K) \rightarrow T_E = 353.268K \tag{29}$$

Resolviendo para el valor de C_E de la ecuación (3) se obtiene:

$$C_E = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(353.268K)} = 376.75m/s \tag{30}$$

Despejando para el valor de V_E de la ecuación (4) se obtiene:

$$V_E = M_E C_E \rightarrow V_E = (0.3079)\,(376.75m/s) \rightarrow V_E = 116.00m/s \tag{31}$$

3.- $P_E =?$ $V_E =?$

Si se produce onda de choque justo en la salida Representa el punto g en Figura 1

Las condiciones en x, que es un instante antes de que ocurra la onda de choque, se conocen de la parte 1 y estos resultados son:

$$M_x = 2.197 \tag{32}$$

$$P_x = 93.98kPa \tag{33}$$

$$T_x = 183.17K \tag{34}$$

$$P_{0x} = 93.98kPa \tag{35}$$

Resolviendo para el valor de M_y de la ecuación (14) se obtiene:

$$M_y = \sqrt{\frac{2.197^2 + \frac{2}{1.4-1}}{\frac{2\,(1.4)}{1.4-1}2.197^2 - 1}} \rightarrow M_y = 0.54746 \tag{36}$$

Resolviendo para el valor de $\frac{P_y}{P_x}$ de la ecuación (13) se obtiene:

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{1 + (1.4)\,(2.197)^2}{1 + (1.4)\,(0.54746)^2} \rightarrow \frac{P_y}{P_x} = 5.46459 \tag{37}$$

Resolviendo para el valor de $\frac{T_y}{T_x}$ de la ecuación (11) se obtiene:

$$\frac{T_y}{T_x} = 5.46459^2 \left(\frac{0.54746}{2.197}\right)^2 \rightarrow \frac{T_y}{T_x} = 1.854 \tag{38}$$

Resolviendo para el valor de $\frac{P_{0y}}{P_{0x}}$ de la ecuación (15) se obtiene:

$$\frac{P_{0y}}{P_{0x}} = 5.46459\,(1.854)^{\frac{1.4}{1-1.4}} \rightarrow \frac{P_{0y}}{P_{0x}} = 0.630 \tag{39}$$

Entonces:

$$P_y = 5.46459 P_x = 5.46459\,(93.98kPa) \rightarrow P_y = P_E = 513.562kPa \tag{40}$$

$$P_{0y} = 0.630 P_{0x} = 0.630\,(1000kPa) \rightarrow P_{0y} = 630.00kPa \tag{41}$$

$$T_y = 1.854T_x = 1.854\,(183.17K) \rightarrow T_y = T_E = 339.60K \tag{42}$$

Resolviendo para el valor de C_y de la ecuación (3) se obtiene:

$$C_y = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(339.60K)} = 369.39m/s \tag{43}$$

Despejando para el valor de V_y de la ecuación (4) se obtiene:

$$V_E = V_y = M_yC_y \rightarrow V_E = (0.54746)\,(369.39m/s) \rightarrow V_E = 202.23m/s \tag{44}$$

4.- $P_E = ?$ $V_E = ?$ $V^* = ?$ $P^* = ?$

Hallar también M_x y M_y si ocurre onda de choque.

a) $P_B = 50kPa$

Los valores de presión hallados hasta ahora en la salida se pueden graficar de la siguiente manera:

Los puntos por debajo del punto d, como el punto e, presentan la característica de que la expansión de P_E a P_B ocurre fuera de la tobera, es decir, la presión en el punto d es la menor que se puede obtener en la salida de la tobera, donde $P_E = P_B = 93.98kPa$. Cualquier valor de P_B por debajo de P_E se obtendrá por expansión fuera de la tobera.

De esta manera:

$$P_B < P_E \rightarrow P_E = P_d = 93.98kPa \tag{45}$$

$$V_E = 596.02m/s \tag{46}$$

P_E en el plano de salida permanece constante.

Para hallar las propiedades en la garganta:

$$M = 1 \tag{47}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left[1 + \frac{1.4-1}{2}\right]^{-\frac{1.4}{1.4-1}} \rightarrow \frac{P^*}{P_0} = 0.52828 \tag{48}$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{1.4-1}{2}\right)^{-1} \rightarrow \frac{T^*}{T_0} = 0.8333 \tag{49}$$

Entonces:

$$P^* = 0.52828P_0 = 0.52828\,(1000kPa) \rightarrow P^* = 528.28kPa \tag{50}$$

$$T^* = 0.8333T_0 = 0.8333\,(360K) \rightarrow T^* = 300K \tag{51}$$

$$C^* = \sqrt{KRT^*} = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(300K)} = 347.19m/s \tag{52}$$

$$V^* = C^* = 347.19m/s \tag{53}$$

b) $P_B = 200kPa$

Esta valor de P_B corresponde al punto f en la Figura 1 y es un valor intermedio entre las presiones de $93.98kPa$ y $513.562kPa$. La presión P_E a la salida no se ve afectada por este aumento de contrapresión desde $93.98kPa$ hasta $200kPa$ y el aumento de presión de P_E a P_B ocurre fuera de la tobera.

De esta manera:

$$P_E = 93.98kPa \tag{54}$$

$$V_E = 596.02m/s \tag{55}$$

Las condiciones en la garganta se mantienen:

$$P^* = 528.28kPa \tag{56}$$

$$T^* = 300K \tag{57}$$

$$V^* = C^* = 347.19m/s \tag{58}$$

c) $P_B = 400kPa$

Este valor de contrapresión todavía no es suficiente para originar onda de choque en la sección de salida. Entonces, al igual que en el caso anterior, no se produce cambio en el valor de P_E y el aumento de presión de P_E a P_B ocurre fuera de la tobera. En consecuencia:

$$P_E = 93.98kPa \tag{59}$$

$$V_E = 596.02m/s \tag{60}$$

$$P^* = 528.28kPa \tag{61}$$

$$T^* = 300K \tag{62}$$

$$V^* = C^* = 347.19m/s \tag{63}$$

d) $P_B = 600kPa$

Este valor de contrapresión supera el valor de $513.562kPa$, pero es inferior a $936kPa$, por lo tanto con este valor de P_B se origina una onda de choque, la cual ocurre dentro de la tobera.

Conociendo $P_E = P_B$, A_E/A^*, A^* y $P_0 = P_{0x}$

$$\frac{A_E}{A_{y^*}} = \frac{A_E}{A_{x^*}}\frac{A_{x^*}}{A_{y^*}} \tag{64}$$

$$\frac{A_{x^*}}{A_{y^*}} = \frac{P_{0y}}{P_{0x}} \tag{65}$$

$$\frac{A_E}{A_{y^*}} = \frac{A_E}{A_{x^*}} \frac{P_{0y}}{P_{0x}} \tag{66}$$

$$\frac{A_E}{A_{y^*}} \frac{P_E}{P_{0y}} = \frac{A_E}{A_{x^*}} \frac{P_E}{P_{0x}} = \frac{\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{2(K-1)}}}{M_E \sqrt{\frac{(K-1)\,M_E^2}{2} + 1}} \tag{67}$$

Se despeja M_E

$$\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{2(K-1)}} = \frac{A_E}{A_{x^*}} \frac{P_E}{P_{0x}} M_E \sqrt{\frac{(K-1)\,M_E^2}{2} + 1} \tag{68}$$

$$\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{K-1}} = \left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)^2 \left(\frac{P_E}{P_{0x}}\right)^2 M_E^2 \left(\frac{(K-1)\,M_E^2}{2} + 1\right) \tag{69}$$

$$\left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)^2 \left(\frac{P_E}{P_{0x}}\right)^2 \frac{(K-1)}{2} M_E^4 + \left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)^2 \left(\frac{P_E}{P_{0x}}\right)^2 M_E^2 - \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{K-1}} = 0 \tag{70}$$

Denotando:

$\alpha = M_E^2$

$a = \left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)^2 \left(\frac{P_E}{P_{0x}}\right)^2 \frac{(K-1)}{2}$

$b = \left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)^2 \left(\frac{P_E}{P_{0x}}\right)^2$

$c = -\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{K-1}}$

Entonces:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{71}$$

$$a = 2^2 \left(\frac{600}{1000}\right)^2 \frac{(1.4-1)}{2} = 0.288 \tag{72}$$

$$b = 2^2 \left(\frac{600}{1000}\right)^2 = 1.44 \tag{73}$$

$$c = -\left(\frac{2}{1.4+1}\right)^{\frac{1.4+1}{1.4-1}} = -0.334898 \tag{74}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0.222653 \\ -5.22265 \end{cases} \tag{75}$$

$$M_E = \pm\sqrt{\alpha} \rightarrow M_E = \sqrt{0.222653} = 0.471861 \tag{76}$$

$$P_{0y} = P_E \left[\frac{(K-1)\, M_E^2}{2} + 1 \right]^{\frac{K}{K-1}} \tag{77}$$

$$P_{0y} = 600 \left[\frac{(1.4-1)\, 0.471861^2}{2} + 1 \right]^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 698.836kPa \tag{78}$$

$$T_{0y} = T_{0x} = 360K \tag{79}$$

$$T_E = T_{0y} \left(\frac{P_E}{P_{0y}} \right)^{\frac{K-1}{K}} = 360K \left(\frac{600}{698.836kPa} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 344.65K \tag{80}$$

Resolviendo para el valor de C_E de la ecuación (3) se obtiene:

$$C_E = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(344.65K)} = 372.1295m/s \tag{81}$$

Despejando para el valor de V_E de la ecuación (4) se obtiene:

$$V_E = M_E C_E \rightarrow V_E = (0.471861)\,(372.1295m/s) \rightarrow V_E = 175.5934m/s \tag{82}$$

$$\frac{A_E}{A_{y^*}} = \left(\frac{A_E}{A_{x^*}} \right) \left(\frac{P_{0y}}{P_{0x}} \right) = 2 \frac{698.836kPa}{1000kPa} = 1.3977 \tag{83}$$

$$\frac{P_{0y}}{P_{0x}} = \left[\frac{\left(\frac{(K+1)\, M_x^2}{2 + (K-1)\, M_x^2} \right)^K}{\frac{2KM_x^2 + 1 - K}{K+1}} \right]^{\frac{1}{K-1}} \tag{84}$$

Definiendo una función error:

$$E = \left[\frac{\left(\frac{(K+1)\, M_x^2}{2 + (K-1)\, M_x^2} \right)^K}{\frac{2KM_x^2 + 1 - K}{K+1}} \right]^{\frac{1}{K-1}} - \frac{P_{0y}}{P_{0x}} \tag{85}$$

Con $x = M_x$ se aplica un método de resolución de ecuaciones no lineales con una incognita.
Por ejemplo en MATLAB:
Mx=fzero('fmachx',0.5)
Respuesta: $M_x = 2.047$

$$M_y = \sqrt{\frac{M_x^2 + \frac{2}{K-1}}{\frac{2K}{K-1} M_x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2.047^2 + \frac{2}{0.4}}{\frac{2\,(1.4)}{0.4} 2.047^2 - 1}} \rightarrow M_y = 0.569545 \tag{86}$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{2 + (K-1)\, M_x^2}{2 + (K-1)\, M_y^2} = \frac{2 + 0.4\,(2.047)^2}{2 + 0.4\,(0.569545)^2} = 1.7261 \tag{87}$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{1 + KM_x^2}{1 + KM_y^2} = \frac{1 + 1.4\,(2.047)^2}{1 + 1.4\,(0.569545)^2} = 4.7219 \tag{88}$$

$$P_x = P_{0x}\left[1 + \frac{K-1}{2}M_x^2\right]^{-\frac{K}{K-1}} = 1000kPa\left[1 + \frac{0.4}{2}2.047^2\right]^{-\frac{1.4}{0.4}} = 118.7835kPa \tag{89}$$

$$P_y = \left(\frac{P_y}{P_x}\right)P_x = 4.7219\,(118.7835kPa) = 560.884kPa \tag{90}$$

$$T_x = T_{0x}\left(1 + \frac{K-1}{2}M_x^2\right)^{-1} = 360K\left(1 + \frac{0.4}{2}2.047^2\right)^{-1} = 195.86K \tag{91}$$

$$T_y = \left(\frac{T_y}{T_x}\right)T_x = (1.7261)\,195.86K = 338.075K \tag{92}$$

Las condiciones en la garganta se mantienen:

$$P^* = 528.28kPa \tag{93}$$

$$T^* = 300K \tag{94}$$

$$V^* = C^* = 347.19m/s \tag{95}$$

e) $P_B = 800kPa$

Este valor de contrapresión supera el valor de $513.562kPa$, pero es inferior a $936kPa$, por lo tanto con este valor de P_B se origina una onda de choque, la cual ocurre dentro de la tobera.

$$\alpha = M_E^2 \tag{96}$$

$$a = \left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)^2\left(\frac{P_E}{P_{0x}}\right)^2\frac{(K-1)}{2} \tag{97}$$

$$b = \left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)^2\left(\frac{P_E}{P_{0x}}\right)^2 \tag{98}$$

$$c = -\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{K-1}} \tag{99}$$

Entonces:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{100}$$

$$a = 2^2 \left(\frac{800}{1000}\right)^2 \frac{(1.4-1)}{2} = 0.512 \tag{101}$$

$$b = 2^2 \left(\frac{800}{1000}\right)^2 = 2.56 \tag{102}$$

$$c = -\left(\frac{2}{1.4+1}\right)^{\frac{1.4+1}{1.4-1}} = -0.334898 \tag{103}$$

$$\alpha = \begin{cases} \ \ 0.127568 \\ -5.127568 \end{cases} \tag{104}$$

$$M_E = \pm\sqrt{\alpha} \rightarrow M_E = \sqrt{0.127568} = 0.357167 \tag{105}$$

$$P_{0y} = P_E \left[\frac{(K-1)\,M_E^2}{2} + 1\right]^{\frac{K}{K-1}} \tag{106}$$

$$P_{0y} = 800 \left[\frac{(1.4-1)\,0.357167^2}{2} + 1\right]^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 873.7457kPa \tag{107}$$

$$T_{0y} = T_{0x} = 360K \tag{108}$$

$$T_E = T_{0y}\left(\frac{P_E}{P_{0y}}\right)^{\frac{K-1}{K}} = 360K\left(\frac{800kPa}{873.7457kPa}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 351.043K \tag{109}$$

Resolviendo para el valor de C_E de la ecuación (3) se obtiene:

$$C_E = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(351.043K)} = 375.565m/s \tag{110}$$

Despejando para el valor de V_E de la ecuación (4) se obtiene:

$$V_E = M_E.C_E \rightarrow V_E = (0.357167)\,(375.565m/s) \rightarrow V_E = 134.1394m/s \tag{111}$$

$$\frac{A_E}{A_{y^*}} = \left(\frac{A_E}{A_{x^*}}\right)\left(\frac{P_{0y}}{P_{0x}}\right) = 2\frac{873.7457kPa}{1000kPa} = 1.74749 \tag{112}$$

Con $x = M_x$ se aplica un método de resolución de ecuaciones no lineales con una incognita.
Por ejemplo en MATLAB:
Mx=fzero('fmachx',0.5)
Respuesta: $M_x = 1.656$

$$M_y = \sqrt{\frac{M_x^2 + \dfrac{2}{K-1}}{\dfrac{2K}{K-1}M_x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1.656^2 + \dfrac{2}{0.4}}{\dfrac{2\,(1.4)}{0.4}1.656^2 - 1}} \rightarrow M_y = 0.6523 \tag{113}$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{2 + (K-1)\, M_x^2}{2 + (K-1)\, M_y^2} = \frac{2 + 0.4\,(1.656)^2}{2 + 0.4\,(0.6523)^2} = 1.42703 \tag{114}$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{1 + KM_x^2}{1 + KM_y^2} = \frac{1 + 1.4\,(1.656)^2}{1 + 1.4\,(0.6523)^2} = 3.0327 \tag{115}$$

$$P_x = P_{0x}\left[1 + \frac{K-1}{2}M_x^2\right]^{-\frac{K}{K-1}} = 1000kPa\left[1 + \frac{0.4}{2}1.656^2\right]^{-\frac{1.4}{0.4}} = 216.443kPa \tag{116}$$

$$P_y = \left(\frac{P_y}{P_x}\right)P_x = 3.0327\,(216.443kPa) = 656.406kPa \tag{117}$$

$$T_x = T_{0x}\left(1 + \frac{K-1}{2}M_x^2\right)^{-1} = 360K\left(1 + \frac{0.4}{2}1.656^2\right)^{-1} = 232.488K \tag{118}$$

$$T_y = \left(\frac{T_y}{T_x}\right)T_x = (1.42703)\,232.488K = 331.767K \tag{119}$$

Las condiciones en la garganta se mantienen:

$$P^* = 528.28kPa \tag{120}$$

$$T^* = 300K \tag{121}$$

$$V^* = C^* = 347.19m/s \tag{122}$$

f) $P_B = 950kPa$

Este valor de contrapresión supera el valor de $936kPa$, por lo tanto con este valor de P_B se tiene solo flujo subsónico. No se presentan ondas de choque y el flujo es isoentrópico.

$$P_E = P_B = 950kPa \tag{123}$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1\right)^{\frac{K}{K-1}} \rightarrow M = \sqrt{\frac{2}{K-1}\left[\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{K-1}{K}} - 1\right]} \tag{124}$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{0.4}\left[\left(\frac{1000}{950}\right)^{\frac{0.4}{1.4}} - 1\right]} \rightarrow M = 0.27169 \tag{125}$$

$$\frac{T_0}{T} = \frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1 \rightarrow T = \frac{2T_0}{(K-1)\,M^2 + 2} = \frac{2\,(360K)}{0.4\,(0.27169)^2 + 2} \rightarrow T = 354.76K \tag{126}$$

Resolviendo para el valor de C_E de la ecuación (3) se obtiene:

$$C_E = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(354.76K)} = 377.548m/s \tag{127}$$

Despejando para el valor de V_E de la ecuación (4) se obtiene:

$$V_E = M_E C_E \rightarrow V_E = (0.27169)\,(377.548m/s) \rightarrow V_E = 102.576m/s \tag{128}$$

Propiedades en la garganta:

$$\frac{A_E}{A^*} = \frac{M^*}{M_E}\left[\frac{(K-1)\,M_E^2 + 2}{(K-1)\,(M^*)^2 + 2}\right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}} \tag{129}$$

Con $x = M^*$ se aplica un método de resolución de ecuaciones no lineales con una incognita.
Por ejemplo en MATLAB:
Mg=fzero('frelarea',0.5)
Respuesta: $M^* = 0.67603$

$$\frac{P_0}{P^*} = \left(\frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1\right)^{\frac{K}{K-1}} \rightarrow P^* = \frac{P_0}{\left(\frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1\right)^{\frac{K}{K-1}}} \tag{130}$$

$$P^* = \frac{1000}{\left(\frac{0.4\,(0.67603)^2}{2} + 1\right)^{\frac{1.4}{0.4}}} \rightarrow P^* = 736.295kPa \tag{131}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{(K-1)\,M^2}{2} + 1 \rightarrow T^* = \frac{2T_0}{(K-1)\,M^2 + 2} = \frac{2\,(360K)}{0.4\,(0.67603)^2 + 2} \rightarrow T^* = 329.85K \tag{132}$$

Resolviendo para el valor de C^* de la ecuación (3) se obtiene:

$$C^* = \sqrt{(1.4)\,(287J/Kg.s)\,(329.85K)} = 364.05m/s \tag{133}$$

Despejando para el valor de V^* de la ecuación (4) se obtiene:

$$V^* = M^* C^* \rightarrow V^* = (0.67603)\,(364.05m/s) \rightarrow V^* = 246.109m/s \tag{134}$$