



Formulario para el Lugar de las Raíces

Dada la ecuación característica

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad (1)$$

La cual es equivalente a:

$$1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad (2)$$

Defina

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3)$$

Entonces

$$1 + KG(s) = 0 \quad (4)$$

Despejando K

$$K = -\frac{1}{G(s)} \quad (5)$$

Pasos para construir el lugar de las raíces

1) Calcule los polos (p_i , raíces de $D(s)$) y los ceros (z_j , raíces de $N(s)$). Enumere los polos desde 1 hasta n , repita el procedimiento para los ceros desde 1 hasta m .

2) Marque los polos (p_i) con **x** y los ceros (z_j) con **o** en el plano s .

3) Dibuje la parte del lugar de las raíces sobre el eje real en todas las regiones a la izquierda de un número impar de polos+ceros reales.

4) Calcule el número de asíntotas, $r = n - m$.

Donde

n : orden del denominador, $D(s)$.

m : orden del numerador, $N(s)$.

5) Calcule el centro de las asíntotas ($r > 0$)

$$\alpha = \frac{\sum \operatorname{Re}\{p_i\} - \sum \operatorname{Re}\{z_j\}}{r} \quad (6)$$

6) Calcule el ángulo de salida de las asíntotas ($r > 0$)

$$\theta_i = \frac{180^\circ + 360^\circ (i - 1)}{r} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

7) Calcule el ángulo de salida desde los polos (polos con parte compleja)

$$\phi_q = \frac{\sum \psi_i - \sum \phi_j - 180^\circ \pm 360^\circ h}{d} \quad (8)$$

Donde

$\sum \psi_i$: suma de los ángulos desde todos los ceros hasta el polo p_q .

$$\psi_i = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}\{p_q\} - \operatorname{Im}\{z_i\}}{\operatorname{Re}\{p_q\} - \operatorname{Re}\{z_i\}} \right)$$

$\sum \phi_j$: suma de los ángulos desde todos los polos hasta el polo p_q .

$$\phi_j = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}\{p_q\} - \operatorname{Im}\{p_j\}}{\operatorname{Re}\{p_q\} - \operatorname{Re}\{p_j\}} \right)$$

d : multiplicidad del polo p_q .

$h = 1, 2, \dots, d$

8) Calcule el ángulo de llegada a los ceros (ceros con parte compleja)

$$\psi_q = \frac{\sum \phi_i - \sum \psi_j + 180^\circ \pm 360^\circ h}{d} \quad (9)$$

Donde

$\sum \phi_i$: suma de los ángulos desde todos los polos hasta el cero z_q .

$$\phi_i = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}\{z_q\} - \operatorname{Im}\{p_i\}}{\operatorname{Re}\{z_q\} - \operatorname{Re}\{p_i\}} \right)$$

$\sum \psi_j$: suma de los ángulos desde todos los ceros hasta el cero z_q .

$$\psi_j = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}\{z_q\} - \operatorname{Im}\{z_j\}}{\operatorname{Re}\{z_q\} - \operatorname{Re}\{z_j\}} \right)$$

d : multiplicidad del cero z_q .

$h = 1, 2, \dots, d$

9) Calcule los puntos y el valor de K cuando el lugar de las raíces cruza el eje imaginario $s = 0 + jw$ usando el criterio de Routh-Hurwitz.

10) Calcule los posibles puntos de separación e intersección del lugar de las raíces evaluando

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{G(s)} \right) = 0 \rightarrow N(s) \frac{dD(s)}{ds} - \frac{dN(s)}{ds} D(s) = 0 \quad (10)$$

Esta condición es necesaria pero no suficiente, los puntos de separación e intersección estarán sobre el eje real o en la trayectoria del lugar de las raíces.

Observaciones:

La ganancia K correspondiente a un punto cualquiera s_0 en la trayectoria del lugar de las raíces puede ser calculada analíticamente como

$$K = \frac{1}{|G(s_0)|} = \frac{|D(s_0)|}{|N(s_0)|} \quad (11)$$

O gráficamente como

$$K = \frac{\text{producto de las distancias a los polos}}{\text{producto de las distancias a los ceros}} \quad (12)$$

Consideraciones:

1) La trayectoria del lugar de las raíces se inicia en los polos ($K = 0$) y termina en los ceros ($K = \infty$). Si el número de polos es mayor que el número de ceros, la diferencia es compensada por ceros en infinito que generan en el gráfico asíntotas hacia las que convergen algunas trayectorias.

2) Cuando se desee cancelar un polo, éste debe ser estable, ya que la cancelación imperfecta de un polo inestable produce resultados desastrosos.

3) Cuando se diseñe un controlador, éste debe ser propio, es decir. no se debe agregar sólo ceros, si no también polos.