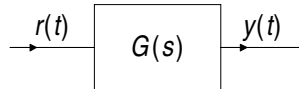




Sistemas de Primer Orden



Ecuación diferencial para un sistema de primer orden

$$a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cr(t) \quad (1)$$

Donde:

a , b y c son constantes.

$y(t)$ es la variable de salida del sistema.

$r(t)$ es la variable de entrada al sistema.

Aplicando la transformada de Laplace para obtener la función de transferencia:

$$G(s) = Y(s) / R(s) \quad (2)$$

se tiene que:

$$(as + b)Y(s) = cR(s) \quad (3)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{c}{as + b} = \frac{(c/b)}{(a/b)s + 1} \quad (4)$$

finalmente:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (5)$$

Donde:

K : ganancia del sistema de primer orden.

τ : constante del tiempo del sistema de primer orden.

Respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada escalón

$$r(t) = Au(t) \quad (6)$$

$$R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{A}{s} \quad (7)$$

Donde A es una constante.

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{KA}{s(\tau s + 1)} = \frac{KA/\tau}{s(s + 1/\tau)} \quad (8)$$

Expandiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1/\tau} \quad (9)$$

Cálculo de los residuos:

$$K_1 = \left. \frac{KA/\tau}{s + 1/\tau} \right|_{s=0} = KA \quad (10)$$

$$K_2 = \left. \frac{KA/\tau}{s} \right|_{s=-1/\tau} = -KA \quad (11)$$

$$Y(s) = KA \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right) \quad (12)$$

Respuesta en el tiempo: (Figura 1).

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = KA \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \quad (13)$$

Valor alcanzado en estado estable

$$y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \quad (14)$$

Aplicando el teorema del valor final:

$$y_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{KA/\tau}{s(s + 1/\tau)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{KA/\tau}{s + 1/\tau} \right) \quad (15)$$

$$y_{ss}(t) = KA \quad (16)$$

Si se compara con la señal de entrada o excitación al sistema, $r(t) = Au(t)$, se observa que cuando el sistema alcanza el estado estable, la señal de salida, $y_{ss}(t)$, es una versión de la entrada, $r(t)$, amplificada o atenuada en un valor K . Por tal razón K recibe el nombre de la ganancia del sistema de primer orden.

Comportamiento dinámico

Para estudiar la dinámica de este sistema es conveniente evaluar la respuesta en el tiempo para ciertos valores particulares del tiempo.

Considere $t = \tau$

$$y(\tau) = KA \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} \right) u(\tau) = KA(1 - e^{-1}) \quad (17)$$

$$y(\tau) = 0,6321KA \quad (18)$$

Por tal razón se define la constante del tiempo, τ , como el tiempo necesario para alcanzar el 63,21% del valor final de un sistema de primer orden ante una entrada escalón. (Figura 1).

Tiempo de estabilización

Matemáticamente el sistema tiende a una asíntota con valor KA , y en consecuencia el tiempo para llegar a este valor es infinito. Desde el punto de vista de ingeniería es necesario establecer un margen en la aproximación a la asíntota de manera que se pueda calcular un tiempo finito en el cual se considera el sistema estabilizado.

Por convención se adoptó como tiempo de estabilización para un sistema de primer orden ante una entrada escalón el valor:

$$t_{ss} = 4\tau \quad (19)$$

Si se evalúa $y(t)$ para este tiempo en particular se tiene:

$$y(4\tau) = KA \left(1 - e^{-\frac{4\tau}{\tau}} \right) u(4\tau) = KA(1 - e^{-4}) \quad (20)$$

$$y(4\tau) = 0,9817KA \quad (21)$$

Por tal razón se define el tiempo de estabilización, $t_{ss} = 4\tau$, como el tiempo necesario para alcanzar el 98,17% del valor final de un sistema de primer orden ante una entrada escalón. (Figura 1).

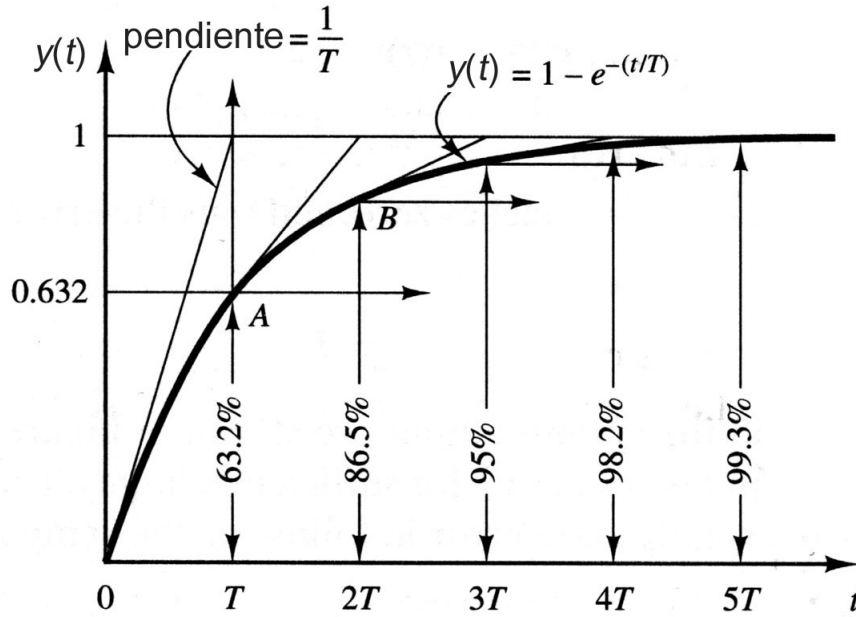


Figura 1: Respuesta al escalón de un sistema de primer orden

Debido a que la respuesta del sistema, $y(t)$, es obtenida a partir de su función de transferencia, su valor inicial es cero, $y(0) = 0$; lo cual en situaciones reales no siempre es cierto, ya que las condiciones iniciales pudieran ser diferentes a cero, es decir, $y(t_0) = y_0 \neq 0$. En tal caso la respuesta del sistema se debe calcular usando la ecuación más general:

$$y(t) = y_0 + (y_{f,ss} - y_0) \left(1 - e^{-\frac{t - t_0}{\tau}} \right) \quad (22)$$

Donde:

y_0 : valor de la salida del sistema para el tiempo t_0 .

$y_{f,ss}$: valor final de la salida del sistema en estado estable.

Ejercicios:

1) Deduzca la ecuación (22).

Sugerencia: resuelva la ecuación diferencial de primer orden asumiendo condiciones iniciales diferentes a cero.

2) Determine la desviación que ocurre en estado estable cuando a un sistema de primer orden con ganancia unitaria ($K = 1$) se le aplica una rampa en la entrada, $r(t) = tu(t)$. Determine también el retraso (α) en estado estable entre la salida y la entrada para alcanzar un mismo valor. ($r(t) = y(t + \alpha)$)

3) Demuestre que un termómetro puede ser modelado por un sistema de primer orden, el cual tiene ganancia: $K = 1$ y constante de tiempo: $\tau = \frac{mc}{hA}$.

Donde:

m : masa del termómetro.

c : calor específico del termómetro.

h : coeficiente global de transferencia de calor hacia el termómetro.

A : área superficial del termómetro.

4) Un sistema de primer orden con función de transferencia, $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$, es excitado por una señal de entrada $r(t) = 3u(t)$.

Inicialmente el sistema está en equilibrio y su valor $y(0^+) = 6$ unidades.

La respuesta del sistema a la entrada aplicada es la siguiente:

t (segundos)	$y(t)$ (unidades)
0^+	6
2	10
4	12

Usando la información suministrada determine:

a) La constante de tiempo del sistema, τ .

b) El valor alcanzado en estado estable por $y(t)$.

c) La ganancia del sistema, K .

5) Un termómetro se encuentra inicialmente en equilibrio con un baño a temperatura T_x .

a) Para el tiempo $t_0 = 0$ min el termómetro es retirado del baño a temperatura T_x y sumergido en otro baño a temperatura T_y .

b) Para el tiempo $t_1 = 4$ min la medición del termómetro se estabiliza en 40°C . Inmediatamente después de hacer esta lectura, el termómetro es re-introducido rápidamente en el baño a temperatura T_x .

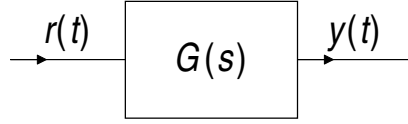
c) Para el tiempo $t_2 = 6$ min la medición del termómetro indica 60°C .

Asumiendo que la constante del tiempo, τ , en los dos baños es igual.

1) Dibuje la gráfica T versus el tiempo.

2) Determine la constante del tiempo (τ) y las temperaturas T_x y T_y .

Sistemas de Segundo Orden



Ecuación diferencial para un sistema de segundo orden

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = \beta r(t) \quad (23)$$

Donde:

a, b, c y β son constantes.

$y(t)$ es la variable de salida del sistema.

$r(t)$ es la variable de entrada al sistema.

Aplicando la transformada de Laplace para obtener la función de transferencia:

$$G(s) = Y(s) / R(s) \quad (24)$$

se tiene que:

$$(as^2 + bs + c) Y(s) = \beta R(s) \quad (25)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\beta}{as^2 + bs + c} = \frac{\beta}{a} \left(\frac{1}{s^2 + (b/a)s + (c/a)} \right) \quad (26)$$

$$G(s) = \frac{\beta}{a(c/a)} \left(\frac{(c/a)}{s^2 + (b/a)s + (c/a)} \right) = \frac{\beta}{c} \left(\frac{(c/a)}{s^2 + (b/a)s + (c/a)} \right) \quad (27)$$

finalmente:

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (28)$$

Donde:

K : ganancia.

ζ : factor de amortiguamiento.

ω_n : frecuencia natural no amortiguada.

Polos:

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (29)$$

Casos:

- a) $\zeta > 1$: dos raíces reales y diferentes.
- b) $\zeta = 1$: dos raíces reales e iguales.
- c) $0 < \zeta < 1$: dos raíces complejas conjugadas, con parte real.
- d) $\zeta = 0$: dos raíces complejas conjugadas, sin parte real.

Estudiando cada caso para una entrada escalón, $r(t) = Au(t)$:

a) Sistema sobre-amortiguado, $\zeta > 1$: dos raíces reales y diferentes.

$$s_1 = \omega_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) = \sigma_1 \quad (30)$$

$$s_2 = \omega_n \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) = \sigma_2 \quad (31)$$

$$Y(s) = G(s) R(s) = \frac{KA\omega_n^2}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)s} \quad (32)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_1}{s - \sigma_1} + \frac{K_2}{s - \sigma_2} + \frac{K_3}{s} \right\} \quad (33)$$

$$y(t) = (K_1 e^{\sigma_1 t} + K_2 e^{\sigma_2 t} + K_3) u(t) \quad (34)$$

$$K_1 = ((s - \sigma_1) Y(s))|_{s=\sigma_1} = \frac{KA\omega_n^2}{(s - \sigma_2)s} \Big|_{s=\sigma_1} \quad (35)$$

$$K_1 = \frac{KA\omega_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_1} = \frac{KA\omega_n^2}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \left(\omega_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right)} \quad (36)$$

$$K_1 = \frac{KA}{2 \left(-\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta^2 - 1 \right)} \quad (37)$$

$$K_2 = ((s - \sigma_2) Y(s))|_{s=\sigma_2} = \frac{KA\omega_n^2}{(s - \sigma_1)s} \Big|_{s=\sigma_2} \quad (38)$$

$$K_2 = \frac{KA\omega_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_2} = \frac{KA\omega_n^2}{-2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\right)} \quad (39)$$

$$K_2 = \frac{KA}{-2\left(-\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta^2 + 1\right)} \quad (40)$$

$$K_3 = (sY(s))|_{s=0} = \frac{KA\omega_n^2}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)} \Big|_{s=0} \quad (41)$$

$$K_3 = \frac{KA\omega_n^2}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{KA\omega_n^2}{\omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} \quad (42)$$

$$K_3 = \frac{KA}{\zeta^2 - \zeta^2 + 1} = KA \quad (43)$$

$$y(t) = \frac{KA}{2} \left(\frac{e^{\sigma_1 t}}{-\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta^2 - 1} - \frac{e^{\sigma_2 t}}{-\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta^2 + 1} + 2 \right) u(t) \quad (44)$$

b) Sistema criticamente amortiguado, $\zeta = 1$: dos raíces reales e iguales.

$$s_{1,2} = -\omega_n \quad (45)$$

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{KA\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad (46)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{(s + \omega_n)^2} + \frac{A_2}{s + \omega_n} + \frac{K_1}{s}\right\} \quad (47)$$

$$y(t) = (A_1 t e^{\omega_n t} + A_2 e^{\omega_n t} + K_1) u(t) \quad (48)$$

$$A_1 = ((s + \omega_n)^2 Y(s))|_{s=-\omega_n} = \frac{KA\omega_n^2}{s} \Big|_{s=-\omega_n} \quad (49)$$

$$A_1 = \frac{KA\omega_n^2}{-\omega_n} = -KA\omega_n \quad (50)$$

$$A_2 = \frac{d((s + \omega_n)^2 Y(s))}{ds} \Big|_{s=-\omega_n} = \frac{d\left(\frac{KA\omega_n^2}{s}\right)}{ds} \Big|_{s=-\omega_n} \quad (51)$$

$$A_2 = -\frac{KA\omega_n^2}{s^2} \Big|_{s=-\omega_n} = -KA \quad (52)$$

$$K_1 = (sY(s))|_{s=0} = \frac{KA\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \Big|_{s=0} \quad (53)$$

$$K_1 = KA \quad (54)$$

$$y(t) = (-KA\omega_n t e^{\omega_n t} - KA e^{\omega_n t} + KA) u(t) \quad (55)$$

finalmente:

$$y(t) = KA(1 - \omega_n t e^{\omega_n t} - e^{\omega_n t}) u(t) \quad (56)$$

c) Sistema sub-amortiguado, $0 < \zeta < 1$: dos raíces complejas conjugadas, con parte real negativa.

$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2} j \right) = -\omega_n \zeta \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j = -\sigma \pm \omega_d j \quad (57)$$

$$Y(s) = \frac{KA\omega_n^2}{s[(s + \omega_n \zeta)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)]} \quad (58)$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{M|\phi}{[(s + \omega_n \zeta)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)]} \quad (59)$$

Forma de la respuesta:

$$y(t) = \left[K_1 + \frac{M}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\omega_n \zeta t} \operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi \right) \right] u(t) \quad (60)$$

Cálculo de los residuos:

$$K_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{KA\omega_n^2}{(s + \omega_n \zeta)^2 + \omega_n^2 (1 - \zeta^2)} \Big|_{s=0} \quad (61)$$

$$K_1 = \frac{KA\omega_n^2}{\omega_n^2 \zeta^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2 \zeta^2} = \frac{KA\omega_n^2}{\omega_n^2} = KA \quad (62)$$

$$M|\phi = [(s + \omega_n \zeta)^2 + \omega_n^2 (1 - \zeta^2)] Y(s)|_{s=0} \quad (63)$$

$$M|\phi = \frac{KA\omega_n^2}{s} \Big|_{s=-\omega_n \zeta + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j} \quad (64)$$

$$M|\phi = \frac{KA\omega_n^2}{-\omega_n \zeta + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j} \quad (65)$$

$$M|\phi = \left(\frac{KA\omega_n^2}{-\omega_n \zeta + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j} \right) \left(\frac{-\omega_n \zeta - \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j}{-\omega_n \zeta - \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j} \right) \quad (66)$$

$$M|\phi = \left(\frac{KA\omega_n^2}{\omega_n^2 \zeta^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2 \zeta^2} \right) \left(-\omega_n \zeta - \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j \right) \quad (67)$$

$$M|\phi = \left(\frac{KA\omega_n^2}{\omega_n^2} \right) \omega_n \left(-\zeta - \sqrt{1 - \zeta^2} j \right) \quad (68)$$

$$M|\phi = KA\omega_n \left(-\zeta - \sqrt{1 - \zeta^2} j \right) \quad (69)$$

$$M = KA\omega_n \sqrt{\zeta^2 + (1 - \zeta^2)} = KA\omega_n \sqrt{\zeta^2 + 1 - \zeta^2} \quad (70)$$

$$M = KA\omega_n \quad (71)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} \right) \quad (72)$$

Debido a que el ángulo ϕ es calculado para un número complejo en el tercer cuadrante se tiene que:

$$\phi = \theta \pm \pi \quad (73)$$

$$\text{Donde } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$\text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi \right) = \text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta \pm \pi \right) \quad (74)$$

$$\text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta \pm \pi \right) = \text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta \right) \cos(\pi) \pm \cos \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta \right) \text{sen}(\pi) \quad (75)$$

$$\text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta \pm \pi \right) = -\text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta \right) \quad (76)$$

$$y(t) = \left[KA + \frac{KA\omega_n}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n \zeta t} \text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi \right) \right] u(t) \quad (77)$$

finalmente:

$$y(t) = KA \left[1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta \right) \right] u(t) \quad (78)$$

Máximo Pico o Sobrepasso: Es la cantidad en que la respuesta excede el valor final de estado estacionario.

El máximo pico ocurre cuando $dy(t)/dt = 0$

Defina

$$g(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (79)$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = sY(s) \quad (80)$$

$$G(s) = \frac{KA\omega_n^2}{(s + \omega_n\zeta)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \quad (81)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{KA}{(1 - \zeta^2)} \left(\frac{\omega_n^2(1 - \zeta^2)}{(s + \omega_n\zeta)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}\right)\right\} \quad (82)$$

$$g(t) = \frac{KA}{(1 - \zeta^2)} e^{-\omega_n\zeta t} \text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t\right) \quad (83)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t) = 0 \rightarrow \frac{KA}{(1 - \zeta^2)} e^{-\omega_n\zeta t} \text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t\right) = 0 \quad (84)$$

Este término es igual a cero solo si

$$\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t = n\pi \quad (85)$$

para: $n = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (86)$$

El pico ocurre para $n = 1$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (87)$$

$$y(t_p) = KA \left[1 - \frac{e^{-\omega_n\zeta \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} + \theta\right) \right] u(t_p) \quad (88)$$

$$y(t_p) = KA \left[1 - \frac{e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}(\pi + \theta) \right], \text{sen}(\pi + \theta) = -\text{sen}(\theta) \quad (89)$$

$$y(t_p) = KA \left[1 + \frac{e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\theta) \right] \quad (90)$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad (91)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{\zeta^2 + (1-\zeta^2)}} = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (92)$$

Nota: ver Figura 2.

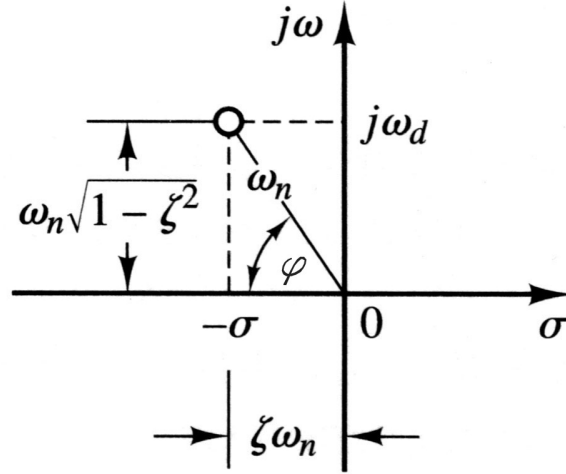


Figura 2: Polos complejos conjugados

$$y(t_p) = KA \left[1 + \frac{e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{1-\zeta^2} \right] \quad (93)$$

$$y(t_p) = KA \left[1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right] \quad (94)$$

Máximo Pico: (ver Figura 3)

$$M_p = KA e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (95)$$

$$\ln(M_p) = \ln(KA) - \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (96)$$

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln\left(\frac{KA}{M_p}\right) \quad (97)$$

$$\frac{\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2} = \left(\ln\left(\frac{KA}{M_p}\right)\right)^2 \quad (98)$$

$$\zeta^2\pi^2 = \left(\ln\left(\frac{KA}{M_p}\right)\right)^2 - \zeta^2\left(\ln\left(\frac{KA}{M_p}\right)\right)^2 \quad (99)$$

$$\zeta = \frac{\ln\left(\frac{KA}{M_p}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{KA}{M_p}\right)\right)^2}} \quad (100)$$

Nota: Si el máximo pico, M_p , se expresa en porcentaje esto implica que

$$M_p\% = \frac{M_p}{KA} 100 \quad (101)$$

en ese caso $0\% < M_p\% < 100\%$

$$M_p\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (102)$$

$$\zeta = -\frac{\ln\left(\frac{M_p\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{M_p\%}{100}\right)\right)^2}} \quad (103)$$

Tiempo de subida o elevación: Es el tiempo que transcurre para que la respuesta alcance por primera vez el valor final (ver Figura 3)

$$t_r = \frac{0,8 + 2,5\zeta}{\omega_n} \quad (104)$$

Tiempo de estabilización o asentamiento: Es el tiempo que tarda la respuesta en llegar a ciertos límites pre-establecidos del valor final y permanecer dentro de estos límites (ver Figura 3)

Límite o tolerancia del 5%:

$$t_s = \frac{3,2}{\zeta\omega_n} \quad (105)$$

Límite o tolerancia del 2%:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (106)$$

Nota: El análogo a la constante del tiempo del sistema de primer orden es

$$\tau_{2do} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad (107)$$

Tiempo Medio: Es el tiempo que transcurre para que la respuesta alcance el 50% del valor final (ver Figura 3)

$$t_d = \frac{1 + 0,7\zeta}{\omega_n} \quad (108)$$

Frecuencia angular amortiguada de oscilación:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (109)$$

Frecuencia amortiguada de oscilación:

$$f_d = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi} \quad (110)$$

Periodo amortiguado de oscilación:

$$T_d = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (111)$$

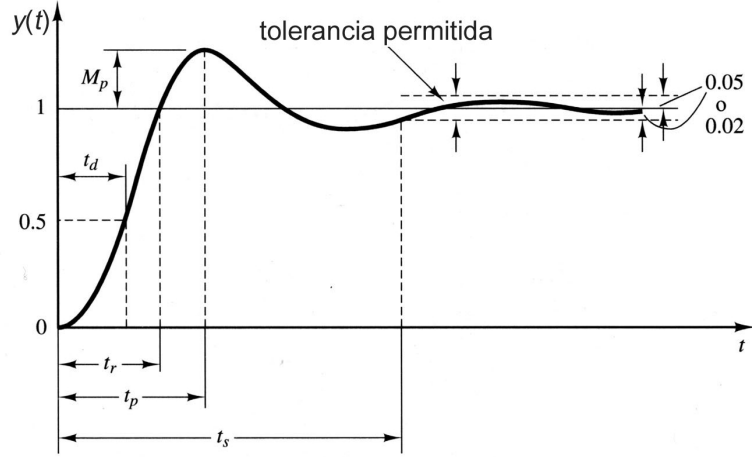


Figura 3: Parámetros de un sistema de segundo orden

d) Sistema sin amortiguación, $\zeta = 0$: dos raíces complejas conjugadas, con parte real igual a cero.

$$s_{1,2} = \pm \omega_n j \quad (112)$$

Este es un caso particular del caso c), así que la respuesta es igual a:

$$y(t) = KA [1 - \text{sen}(\omega_n t + \theta)] u(t) \quad (113)$$

Donde $\theta = \pi/2$

$$\text{sen}(A + \pi/2) = \text{sen}(A) \cos(\pi/2) + \cos(A) \text{sen}(\pi/2) \quad (114)$$

$$\text{sen}(A + \pi/2) = \cos(A) \quad (115)$$

finalmente

$$y(t) = KA [1 - \cos(\omega_n t)] u(t) \quad (116)$$

En la Figura 4 se aprecia el efecto del valor del factor de amortiguamiento, ζ , en la respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón.

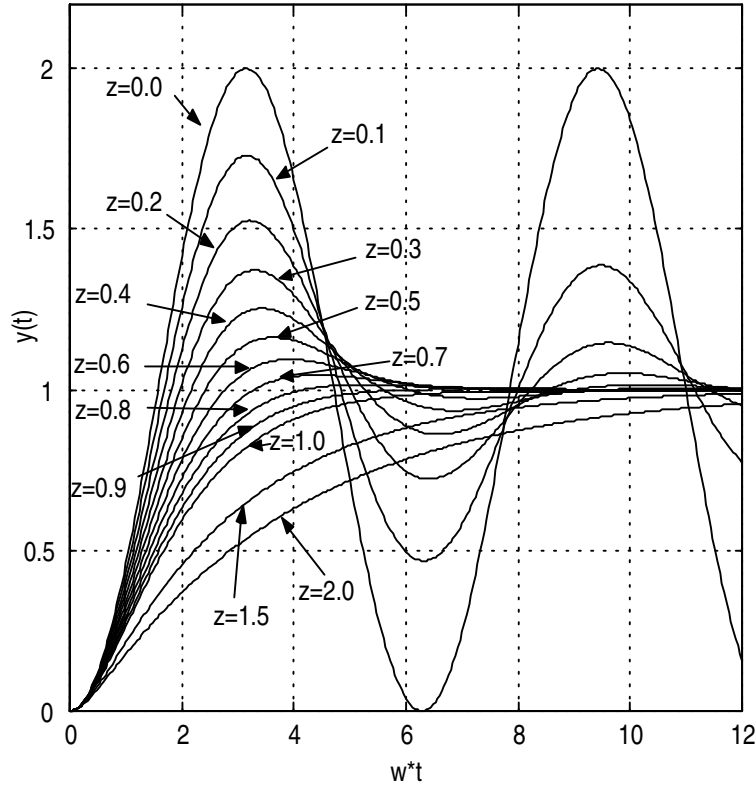


Figura 4: Efecto de ζ en la respuesta de un sistema de segundo orden

Especificaciones para sistemas de segundo orden

En ciertas circunstancias es deseable que un sistema de segundo orden cumpla especificaciones basadas en su respuesta. Es decir, si se desea que:

El tiempo del pico sea menor que un valor máximo:

$$t_p \leq t_{p,\max} \quad (117)$$

$$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \leq t_{p,\max} \quad (118)$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \geq \frac{\pi}{t_{p,\max}} \quad (119)$$

Donde: $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la ordenada de la posición de un polo en el plano s .

Tiempo de estabilización o asentamiento menor que un valor máximo:

$$t_s \leq t_{s,\max} \quad (120)$$

$$\frac{\beta}{\zeta\omega_n} \leq t_{s,\max} \quad (121)$$

Donde $\beta = 3, 2$ para una tolerancia del 5% y $\beta = 4$ una tolerancia del 2%.

$$\zeta\omega_n \geq \frac{\beta}{t_{s,\max}} \quad (122)$$

Donde: $\zeta\omega_n$ es la abscisa de la posición de un polo en el plano s .

El máximo pico sea menor que un valor máximo:

$$M_p \leq M_{p,\max} \quad (123)$$

$$KAe^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq M_{p,\max} \quad (124)$$

$$\zeta \geq \frac{\ln\left(\frac{KA}{M_{p,\max}}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{KA}{M_{p,\max}}\right)\right)^2}} \quad (125)$$

Nota: Si el máximo pico, $M_{p,\max}$, se expresa en porcentaje esto implica que

$$M_{p,\max} \% = \frac{M_{p,\max}}{KA} 100 \quad (126)$$

$$\zeta \geq -\frac{\ln\left(\frac{M_p \%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{M_p \%}{100}\right)\right)^2}} \quad (127)$$

Donde

$$\theta = \cos^{-1}(\zeta) \quad (128)$$

Tiempo de subida o elevación menor que un valor máximo:

$$t_r \leq t_{r,\max} \quad (129)$$

$$\frac{0,8 + 2,5\zeta}{\omega_n} \leq t_{r,\max} \quad (130)$$

$$\omega_n \geq \frac{0,8 + 2,5\zeta}{t_{r,\max}} \quad (131)$$

En este caso es más difícil dibujar la curva para esta especificación, sin embargo a modo de referencia se tienen los siguientes puntos:

a) Intersección con las abscisas: $\zeta = 1$

$$\omega_n = \frac{0,8 + 2,5}{t_{r,\max}} \quad (132)$$

b) Intersección con las ordenadas: $\zeta = 0$

$$\omega_n = \frac{0,8}{t_{r,\max}} \quad (133)$$

c) Intersección con el límite de la especificación de tiempo del pico máximo

$$(1 - \zeta^2) (0,8 + 2,5\zeta)^2 - \left(\frac{\pi t_{r,\max}}{t_{p,\max}} \right)^2 = 0 \quad (134)$$

d) Intersección con el límite de la especificación de tiempo de estabilización o asentamiento máximo.

$$2,5\zeta^2 + 0,8\zeta - \frac{\beta t_{r,\max}}{t_{s,\max}} = 0 \quad (135)$$

e) Intersección con el límite de la especificación de máximo tiempo máximo.

$$\omega_n = \frac{0,8 + 2,5\zeta_{M_{p,\max}}}{t_{r,\max}} \quad (136)$$

En la Figura 5 se muestra un ejemplo de como se define la zona válida para ubicar los polos que cumplan las siguientes especificaciones:

Tiempo del pico:

$$t_p \leq 0,62832 \text{ s} \quad (137)$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \geq \frac{\pi}{t_{p,\max}} \geq 5 \quad (138)$$

Tiempo de estabilización o asentamiento (al 2%):

$$t_s \leq 0,57143 \text{ s} \quad (139)$$

$$\zeta \omega_n \geq \frac{4}{t_{s,\max}} \geq 7 \quad (140)$$

El máximo pico sea menor que un valor máximo:

$$M_p \leq 4,321392 \% \quad (141)$$

$$\zeta \geq -\frac{\ln\left(\frac{M_p \%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{M_p \%}{100}\right)\right)^2}} \geq 0,70710678 \quad (142)$$

$$\theta \leq \cos^{-1}(0,70710678) \leq 45^\circ \quad (143)$$

Tiempo de subida o elevación menor que un valor máximo:

$$t_r \leq 0,30000 \text{ s} \quad (144)$$

Para $t_{r,\max}$ se tiene:

a) Intersección con las abscisas: $\zeta = 1$

$$\omega_n = \frac{0,8 + 2,5}{0,30000} = 11 \quad (145)$$

b) Intersección con las ordenadas: $\zeta = 0$

$$\omega_n = \frac{0,8}{t_{r,\max}} = 2,6667 \quad (146)$$

c) Intersección con el límite de la especificación de tiempo del pico máximo

$$(1 - \zeta^2) (0,8 + 2,5\zeta)^2 - \left(\frac{\pi t_{r,\max}}{t_{p,\max}}\right)^2 = 0 \quad (147)$$

Usando MATLAB versión 5.3

```

f = inline('(1 - z^2) * (0.8 + 2.5 * z)^2 - (pi * 0.3/0.62832)^2');
z1 = fzero(f, 0.5)
z1 = 0.31138988692190
z2 = fzero(f, 5)
z2 = 0.86144451939513
w1 = (0.8 + 2.5 * z1)/0.3
w1 = 5.26158239101580
w2 = (0.8 + 2.5 * z2)/0.3
w2 = 9.84537099495944
zw1 = z1 * w1
zw1 = 1.63840354576865    % abscisa
zw2 = z2 * w2
zw2 = 8.48124088501962    % abscisa
ws1 = w1 * sqrt(1 - z1^2)
ws1 = 5    % ordenada
ws2 = w2 * sqrt(1 - z2^2)
ws2 = 5    % ordenada

```

d) Intersección con el límite de la especificación de tiempo de estabilización o asentamiento máximo.

$$2,5\zeta^2 + 0,8\zeta - \frac{\beta t_{r,\max}}{t_{s,\max}} = 0 \quad (148)$$

Usando MATLAB versión 5.3

```

z = (-0.8 + sqrt(0.8^2 + 4 * 2.5 * 4 * 0.3/0.57143))/(2 * 2.5)
z = 0.77037513939553
w = (0.8 + 2.5 * z)/0.3
w = 9.08645949496274
zw = z * w
zw = 7    % abscisa
ws = w * sqrt(1 - z^2)
ws = 5.79344380767431    % ordenada

```

e) Intersección con el límite de la especificación de máximo tiempo máximo.

$$\omega_n \geq \frac{0,8 + 2,5\zeta_{M_{p,\max}}}{t_{r,\max}} \quad (149)$$

Usando MATLAB versión 5.3

```

w = (0.8 + 2.5 * 0.70710678)/0.3
w = 8.55922313887492
zw = z * w
zw = 6.05228468448624    % abscisa
ws = w * sqrt(1 - z^2)
ws = 6.05228476188828    % ordenada

```

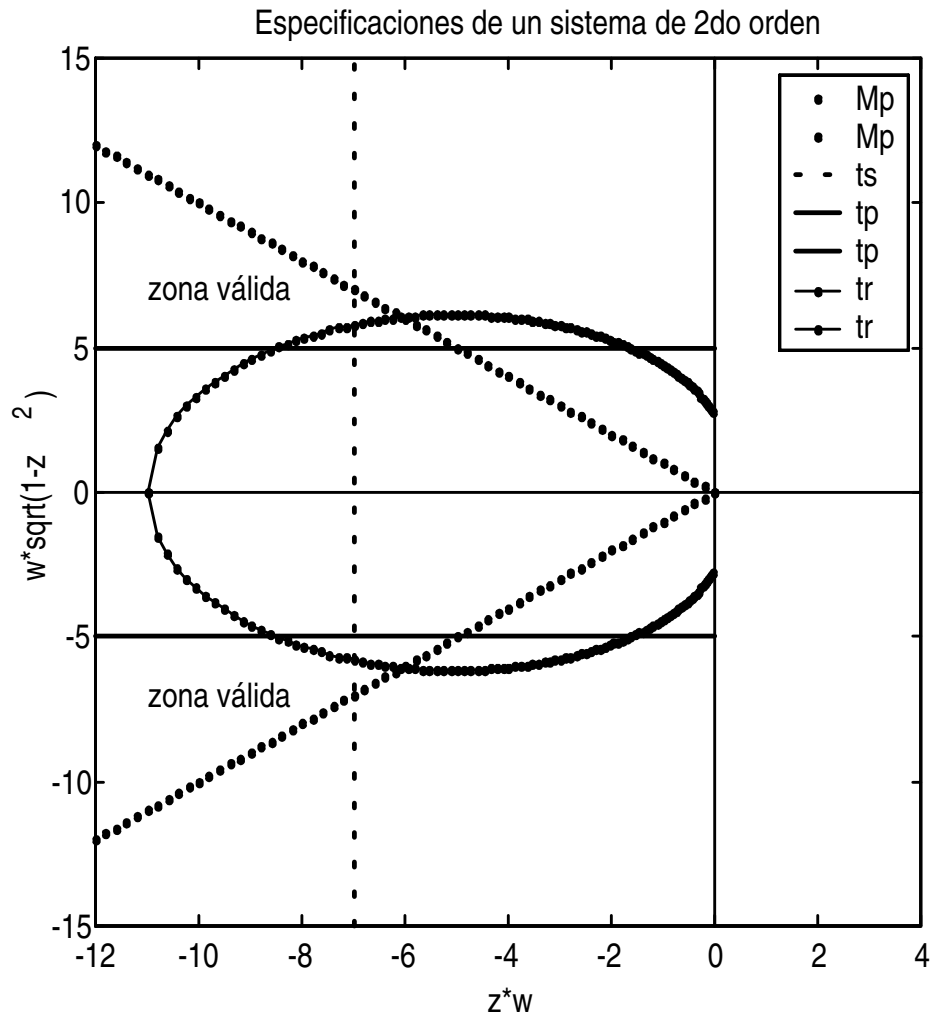


Figura 5

Ejercicios:

1) Para el sistema de control que se muestra en la Figura 6, determine la ganancia a y la localización del polo b de los parámetros que definen al controlador, de tal manera que la respuesta del sistema, no exceda un M_p de 25% y que el tiempo de subida, t_r , sea menor que 0.1 s.

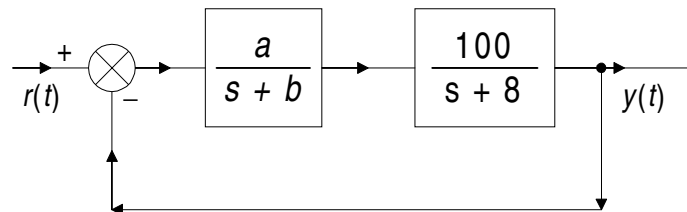


Figura 6

2) En la Figura 7 se muestra la respuesta de un sistema a una entrada escalón de amplitud 2 unidades ($r(t) = 2u(t)$).

a) Encuentre la función de transferencia, $G(s)$, que describe el modelo del sistema.

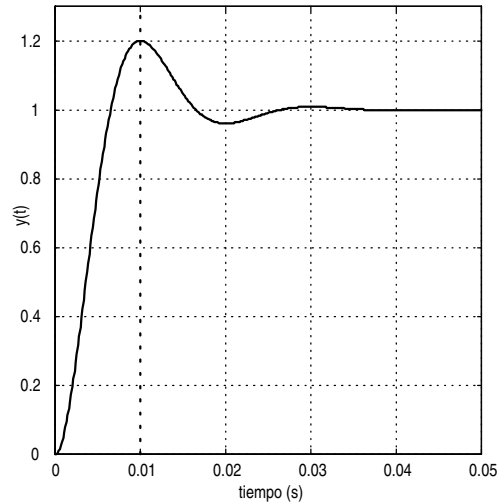


Figura 7

b) Si la función de transferencia, $G(s)$, encontrada en a) se introduce en un sistema de control como el que se muestra en la Figura 8, determine la ganancia a del controlador de tal manera que el sistema se comporte como críticamente amortiguado.

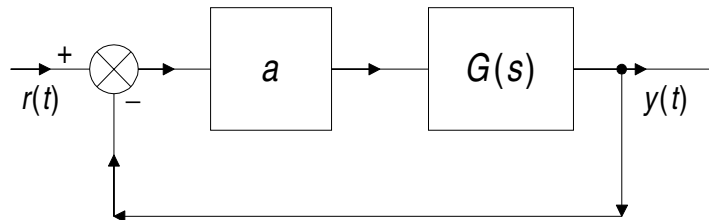


Figura 8

Bibliografía

DORF Richard C. and BISHOP Robert H., **Modern Control Systems**, Addison-Wesley Publishing Company, 7th Edition, New York, U.S.A., 1995.

FRANKLIN Gene F., POWELL J. David and EMAMI-NAEINI Abbas, **Feedback Control of Dynamic Systems**, Addison-Wesley Publishing Company, 3rd Edition, New York, U.S.A., 1994.

KUO Benjamin C., **Automatic Control Systems**, Prentice-Hall Inc., 6th Edition, New Jersey, U.S.A., 1991.

OGATA Katsuhiko, **Modern Control Engineering**, Prentice-Hall Inc., 3rd Edition, New Jersey, U.S.A., 1997.