Capítulo 5

Controlabilidad y Observabilidad

5.1 Controlabilidad Completa

Un sistema es controlable a un tiempo t_0 si es posible transferir mediante el uso de un vector de control sin restricciones al sistema desde el estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier otro estado en un intervalo finito de tiempo.

Un sistema exhibe controlabilidad completa si todos los estados son controlables.

Condición de controlabilidad completa: Un sistema es controlable si la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$ es de rango completo, es decir, el rango de $\mathcal{C}$ es igual a n, el número de estados. $\mathcal{C}$ se construye de la siguiente manera:

$$\mathcal{C} = \left[\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \tag{5.1}$$

Una manera muy intuitiva de determinar la controlabilidad cuando los autovalores del sistema son todos diferentes consiste en obtener mediante transformaciones de similaridad, la matriz diagonal $\mathcal{D}$.

En este cambio se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{5.2}$$

y

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{D}\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{5.3}$$

Donde

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Tx}(t) \tag{5.4}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t) \tag{5.5}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{TAx}(t) + \mathbf{TBu}(t) \tag{5.6}$$

$$\dot{\mathbf{z}}\left(t\right)=\mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{z}\left(t\right)+\mathbf{TBu}\left(t\right) \tag{5.7}$$

Donde

$$\mathcal{D}=\mathbf{TAT}^{-1} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{B}}=\mathbf{TB} \tag{5.8}$$

La condición de controlabilidad en este caso establece que los estados correspondientes a las filas de $\bar{\mathbf{B}}$ iguales a cero no son controlables.

Si todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ no son diferentes es posible que la diagonalización a través de transformaciones de similaridad sea imposible. En tal caso la matriz $\mathbf{A}$ puede ser transformada en la forma canónica de Jordan. Suponga que se determina una matriz de transformación $\mathbf{T}$ de tal manera que

$$\mathcal{J}=\mathbf{TAT}^{-1} \;\; \text{y} \;\; \bar{\mathbf{B}}=\mathbf{TB} \tag{5.9}$$

La condición de controlabilidad en este caso establece que un sistema es controlable si:

Sistemas MIMO:

Para cada $i-\acute{e}simo$ autovalor se forma una matriz $\hat{\mathbf{B}}_i$ con las filas de la matriz $\bar{\mathbf{B}}$ que correspondan a la última fila de cada uno de los bloques de Jordan asociados a ese autovalor.

Condición: Las filas de cada una de las matrices $\hat{\mathbf{B}}_i$ formadas deben ser linealmente independientes.

Nota: Esto implica que el sistema requiere que el número de entradas sea igual al máximo número de bloques de Jordan asociados a alguno de los autovalores (condición necesaria, pero no suficiente).

Sistemas SISO:

1) No existen dos bloques de Jordan asociados con un mismo autovalor.

2) Al menos uno de los elementos de la matriz $\bar{\mathbf{B}}$ en la fila que corresponde a la última fila de cada bloque de Jordan es diferente de cero.

3) Al menos uno de los elementos de la matriz $\bar{\mathbf{B}}$ en la filas que corresponden a autovalores diferentes es diferente de cero.

Desde el punto de vista de la frecuencia, la condición para que exista completa controlabilidad es que no ocurra cancelación en la función o matriz de transferencia

5.2 Controlabilidad de la salida

En la mayoría de casos prácticos se desea controlar la salida en lugar de los estados del sistema. Controlabilidad completa de los estados no garantiza la controlabilidad de la salida del sistema. Se define en este caso una matriz $\mathcal{S}$, para la cual debe cumplirse que el rango debe ser igual a m, el número de variables de salida.

$$\mathcal{S}=\left[\mathbf{CB}\vdots\mathbf{CAB}\vdots\mathbf{CA}^{2}\mathbf{B}\vdots\cdots\vdots\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}\vdots\mathbf{D}\right] \tag{5.10}$$

5.3 Observabilidad Completa

Un sistema es observable a un tiempo t_0 si con el sistema en un estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de las observaciones de la salida $y(t)$ durante un intervalo finito de tiempo.

Un sistema exhibe observabilidad completa si todos los estados son observables.

Condición de observabilidad completa: Un sistema es observable si la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ es de rango completo, es decir, el rango de $\mathcal{O}$ es igual a n, el número de estados. La matriz $\mathcal{O}$ se construye de la siguiente manera:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

La observabilidad tambien se puede determinar a partir de la matriz diagonal cuando los autovalores del sistema son todos diferentes

En este caso se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{5.12}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{D}\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{5.13}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t) + \mathbf{Du}(t) \tag{5.14}$$

Donde

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Tx}(t) \tag{5.15}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t) \tag{5.16}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{TAx}(t) + \mathbf{TBu}(t) \tag{5.17}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{z}(t) + \mathbf{TBu}(t) \tag{5.18}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{z}(t) + \mathbf{Du}(t) \tag{5.19}$$

Donde

$$\mathcal{D} = \mathbf{TAT}^{-1} \ , \ \ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{TB} \ \ \text{y} \ \ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}^{-1} \tag{5.20}$$

La condición de observabilidad establece que los estados correspondientes a las filas de $\bar{\mathbf{C}}$ iguales a cero no son observables.

Si todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ no son diferentes es posible que la diagonalización a través de transformaciones de similaridad sea imposible. En tal caso la matriz $\mathbf{A}$ puede ser transformada en la forma canónica de Jordan. Suponga que se determina una matriz de transformación $\mathbf{T}$ de tal manera que

$$\mathcal{J} = \mathbf{TAT}^{-1} \ \ , \ \ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{TB} \ \ \text{y} \ \ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}^{-1} \tag{5.21}$$

La condición de observabilidad en este caso establece que un sistema es observable si:

Sistemas MIMO:

Para cada $i - \acute{e}simo$ autovalor se forma una matriz $\hat{\mathbf{C}}_i$ con las columnas de la matriz $\bar{\mathbf{C}}$ que correspondan a la primera columna de cada uno de los bloques de Jordan asociados a ese autovalor.

Condición: Las columnas de cada una de las matrices $\hat{\mathbf{C}}_i$ formadas deben ser linealmente independientes.

Nota: Esto implica que el sistema requiere que el número de salidas sea igual al máximo número de bloques de Jordan asociados a alguno de los autovalores (condición necesaria, pero no suficiente).

Sistemas SISO:

1) No existen dos bloques de Jordan asociados con un mismo autovalor.

2) Al menos uno de los elementos de la matriz $\bar{\mathbf{C}}$ en la columna que corresponde a la primera columna de cada bloque de Jordan es diferente de cero.

3) Al menos uno de los elementos de la matriz $\bar{\mathbf{C}}$ en la columnas que corresponden a autovalores diferentes es diferente de cero.

Desde el punto de vista de la frecuencia, la condición para que exista observabilidad es que no ocurra cancelación en la función o matriz de transferencia.

Para fines de diseño, se debe hallar la matriz de transformación $\mathbf{T}$ que hace la matriz $\mathbf{A}$ diagonal si todos los autovalores son diferentes. La estructura mínima de los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ se puede obtener por prueba y error a partir de las ecuaciones

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{TB} \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{CT}^{-1} \tag{5.22}$$

Donde los elementos de $\mathbf{B}_2$ diferentes a cero garantizan la controlabilidad de su estado correspondiente y los elementos de $\mathbf{C}_2$ diferentes a cero garantizan la observabilidad de su estado correspondiente. Otra forma es evaluar por prueba y error $n_c = rank\,(ctrb\,(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ y $n_o = rank\,(obsv\,(\mathbf{A}, \mathbf{C}))$, donde n_c y n_o es el número de estados controlables y observables, respectivamente.

Capítulo 6

Algoritmo de descomposición de Kalman

Kalman establece que a través de un procedimiento sistemático es posible separar los estados que conforman una realización en cuatro grupos de estados:

I) Controlables y observables. Las matrices que los contienen definen la realización mínima.

II) Controlables y no observables.

III) No controlables y observables.

IV) No controlables y no observables.

Dada una realización

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{6.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{6.2}$$

Algoritmo:

1) **Descomposición en estados controlables y no controlables.**

Calcular la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = \left[\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^{2}\mathbf{B} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \tag{6.3}$$

2) Calcular el rango de $\mathcal{C} : R = rank(\mathcal{C})$.

3) Si R es igual al número total de estados(n), entonces todos los estados son controlables y se continua con el paso 7)

4) Si R es menor que n se construye la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden n.

5) Se procede por el método de eliminación gaussiana con pivote parcial a eliminar las filas linealmente dependientes, de manera tal que al terminar se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_2 & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{0} & \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Donde $\mathcal{C}_2$ contiene las filas linealmente independientes y $\mathbf{T}_1$ es la matriz de transformación.

6) Usando la matriz de transformación $\mathbf{T}_1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_1\mathbf{A}\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Donde el número de filas de $\bar{\mathbf{A}}_{11}$ es igual al número de estados controlables.

7) **Descomposición en estados observables y no observables (controlables).**

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \bar{\mathbf{A}}_{11}^T \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \bar{\mathbf{C}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{B}}_1^T \end{aligned} \tag{6.7}$$

8) Calcular la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C}_c = \left[\tilde{\mathbf{B}} \vdots \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \vdots \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{B}} \vdots \cdots \vdots \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \tilde{\mathbf{B}}\right] \tag{6.8}$$

9) Calcular el rango de $\mathcal{C}_c$: $R_c = rank\left(\mathcal{C}_c\right)$.

10) Si R_c es igual al número total de estados de $\tilde{\mathbf{A}}$ (n_c), entonces todos los estados son observables y se continua con el paso 14).

11) Si R es menor que n_c se construye la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_c & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden n_c.

12) Se procede por el método de eliminación gaussiana con pivote parcial a eliminar las filas linealmente dependientes, de manera tal que al terminar se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_{c2} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} & \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

Donde $\mathcal{C}_2$ contiene las filas linealmente independientes y $\mathbf{T}_2$ es la matriz de transformación.

13) Usando la matriz de transformación $\mathbf{T}_2$ se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_2\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_2\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Estas matrices son equivalentes a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_2\bar{\mathbf{A}}_{11}^T\mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_2\bar{\mathbf{C}}_1^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{B}}_1^T\mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Aplicando la transpuesta

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}^T &= \mathbf{T}_2^{-T}\bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{T}_2^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11}^T & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}}_{12}^T & \hat{\mathbf{A}}_{22}^T \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}}^T &= \bar{\mathbf{C}}_1\mathbf{T}_2^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{C}}^T &= \mathbf{T}_2^{-T}\bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_1^T \\ \hat{\mathbf{C}}_2^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Defina

$$\begin{aligned} &\mathring{\mathbf{T}}_2 = \mathbf{T}_2^{-T} \\ &\mathring{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^T = \mathring{\mathbf{T}}_2\bar{\mathbf{A}}_{11}\mathring{\mathbf{T}}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathring{\mathbf{A}}_{21} & \mathring{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\ &\mathring{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{B}}^T = \bar{\mathbf{C}}_1\mathring{\mathbf{T}}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &\mathring{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{C}}^T = \mathring{\mathbf{T}}_2\bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{B}}_1 \\ \mathring{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Donde el número de columnas de $\mathring{\mathrm{A}}_{11}$ es igual al número de estados observables (y controlables).

14) **Descomposición en estados observables y no observables (no controlables).**
Defina

$$\begin{aligned} \breve{\mathbf{A}} &= \bar{\mathbf{A}}_{22}^T \\ \breve{\mathbf{B}} &= \bar{\mathbf{C}}_2^T \\ \breve{\mathbf{C}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.15}$$

15) Calcular la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C}_{nc} = \left[\breve{\mathbf{B}} \vdots \breve{\mathbf{A}}\breve{\mathbf{B}} \vdots \breve{\mathbf{A}}^{2} \breve{\mathbf{B}} \vdots \cdots \vdots \breve{\mathbf{A}}^{n-1} \breve{\mathbf{B}} \right] \tag{6.16}$$

16) Calcular el rango de $\mathcal{C}_{nc}$: $R_{nc} = rank\,(\mathcal{C}_{nc})$.

17) Si R_{nc} es igual al número total de estados de $\breve{\mathbf{A}}$ (n_{nc}), entonces todos los estados son observables y se continua con el paso 21)

18) Si R es menor que n_{nc} se construye la matriz

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{C}_{nc} & \mathbf{I} \end{array} \right] \tag{6.17}$$

Donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden n_{nc}.

19) Se procede por el método de eliminación gaussiana con pivote parcial a eliminar las filas linealmente dependientes, de manera tal que al terminar se tiene

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{C}_{nc2} & \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{0} & \end{array} \right] \tag{6.18}$$

Donde $\mathcal{C}_{nc2}$ contiene las filas linealmente independientes y $\mathbf{T}_3$ es la matriz de transformación.

20) Usando la matriz de transformación $\mathbf{T}_3$ se obtiene

$$\begin{aligned} \breve{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_3 \breve{\mathbf{A}} \mathbf{T}_3^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \breve{\mathbf{A}}_{11} & \breve{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \breve{\mathbf{A}}_{22} \end{array} \right] \\ \breve{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_3 \breve{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c} \breve{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \breve{\mathbf{C}} &= \breve{\mathbf{C}} \mathbf{T}_3^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \breve{\mathbf{C}}_1 & \breve{\mathbf{C}}_2 \end{array} \right] \end{aligned} \tag{6.19}$$

Estas matrices son equivalentes a

$$\begin{aligned} \breve{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_3 \bar{\mathbf{A}}_{22}^{T} \mathbf{T}_3^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \breve{\mathbf{A}}_{11} & \breve{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \breve{\mathbf{A}}_{22} \end{array} \right] \\ \breve{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_3 \bar{\mathbf{C}}_2^{T} = \left[\begin{array}{c} \breve{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \breve{\mathbf{C}} &= \mathbf{0} \mathbf{T}_3^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \end{array} \right] \end{aligned} \tag{6.20}$$

Aplicando la transpuesta

$$\begin{aligned} \breve{\mathbf{A}}^{T} &= \mathbf{T}_3^{-T} \bar{\mathbf{A}}_{22} \mathbf{T}_3^{T} = \left[\begin{array}{cc} \breve{\mathbf{A}}_{11}^{T} & \mathbf{0} \\ \breve{\mathbf{A}}_{12}^{T} & \breve{\mathbf{A}}_{22}^{T} \end{array} \right] \\ \breve{\mathbf{B}}^{T} &= \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{T}_3^{T} = \left[\begin{array}{cc} \breve{\mathbf{B}}_1^{T} & \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \breve{\mathbf{C}}^{T} &= \mathbf{T}_3^{-T} \mathbf{0} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \end{array} \right] \end{aligned} \tag{6.21}$$

Defina

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{T}}_3 = \mathbf{T}_3^{-T} \\
&\dot{\mathbf{A}} = \check{\mathbf{A}}^T = \dot{\mathbf{T}}_3 \bar{\mathbf{A}}_{22} \dot{\mathbf{T}}_3^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{A}}_{21} & \dot{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\
&\dot{\mathbf{C}} = \check{\mathbf{B}}^T = \bar{\mathbf{C}}_2 \dot{\mathbf{T}}_3^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&\dot{\mathbf{B}} = \check{\mathbf{C}}^T = \dot{\mathbf{T}}_3 \mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Donde el número de columnas de $\dot{\mathrm{A}}_{11}$ es igual al número de estados observables (y no controlables).

21) En conclusión la descomposición es

$$
\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} & & \\ \mathring{\mathbf{A}}_{21} & \mathring{\mathbf{A}}_{22} & & * \\ & & \dot{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{A}}_{21} & \dot{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{B}}_1 \\ \mathring{\mathbf{B}}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}
\tag{6.23}
$$
$$
\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{D} = \mathbf{D}
$$

Donde:

$\left\{\mathring{\mathbf{A}}_{11}, \mathring{\mathbf{B}}_1, \mathring{\mathbf{C}}_1\right\}$ definen el grupo I, es decir, la realización mínima: estados controlables y observables.

$\mathring{\mathbf{A}}_{22}$ está asociada al grupo II, es decir, estados controlables y no observables.

$\dot{\mathbf{A}}_{11}$ está asociada al grupo III, es decir, estados no controlables y observables.

$\dot{\mathbf{A}}_{22}$ está asociada al grupo IV, es decir, estados no controlables y no observables.

22) Para relacionar la realización original y la final se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{A}}_{11} = \mathring{\mathbf{T}}_2^{-1} \mathring{\mathbf{A}} \mathring{\mathbf{T}}_2 \\
&\bar{\mathbf{C}}_1 = \mathring{\mathbf{C}} \mathring{\mathbf{T}}_2 \\
&\bar{\mathbf{B}}_1 = \mathring{\mathbf{T}}_2^{-1} \mathring{\mathbf{B}} \\
&\bar{\mathbf{A}}_{22} = \dot{\mathbf{T}}_3^{-1} \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{T}}_3 \\
&\bar{\mathbf{C}}_2 = \dot{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{T}}_3 \\
&\mathbf{0} = \dot{\mathbf{T}}_3^{-1} \dot{\mathbf{B}}
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A} = \mathbf{T}_1^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T}_1 \\
&\mathbf{B} = \mathbf{T}_1^{-1} \bar{\mathbf{B}} \\
&\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{T}_1 \\
&\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}}
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

Substituyendo se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{T}_1^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\
\mathbf{B} &= \mathbf{T}_1^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\
\mathbf{D} &= \bar{\mathbf{D}}
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

Substituyendo los términos internos a la matriz se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{T}_1^{-1} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{T}}_2^{-1}\mathring{\mathbf{A}}\mathring{\mathbf{T}}_2 & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{T}}_3^{-1}\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\
\mathbf{B} &= \mathbf{T}_1^{-1} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{T}}_2^{-1}\mathring{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{C}}\mathring{\mathbf{T}}_2 & \dot{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\
\mathbf{D} &= \bar{\mathbf{D}}
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Lo que es equivalente a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{T}_1^{-1} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{T}}_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{T}}_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{A}} & \mathring{\mathbf{T}}_2\bar{\mathbf{A}}_{12}\dot{\mathbf{T}}_3^{-1} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{T}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\
\mathbf{B} &= \mathbf{T}_1^{-1} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{T}}_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{T}}_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{C}} & \dot{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{T}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}_1
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

Defina

$$
\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{T}}_2 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{T}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2^{-T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_3^{-T} \end{bmatrix}
\tag{6.29}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_4^{-1} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{A}} & \mathring{\mathbf{T}}_2\bar{\mathbf{A}}_{12}\dot{\mathbf{T}}_3^{-1} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \mathbf{T}_4\mathbf{T}_1 \\
\mathbf{B} &= \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_4^{-1} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{C}} & \dot{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \mathbf{T}_4\mathbf{T}_1
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Defina

$$
\mathbf{T}_5 = \mathbf{T}_4\mathbf{T}_1 \tag{6.31}
$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{T}_5^{-1}\mathbb{A}\mathbf{T}_5\\ \mathbf{B} &= \mathbf{T}_5^{-1}\mathbb{B}\\ \mathbf{C} &= \mathbb{C}\mathbf{T}_5\end{aligned} \tag{6.32}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \mathbf{T}_5\mathbf{A}\mathbf{T}_5^{-1}\\ \mathbb{B} &= \mathbf{T}_5\mathbf{B}\\ \mathbb{C} &= \mathbf{C}\mathbf{T}_5^{-1}\\ \mathbb{D} &= \mathbf{D}\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2^{-T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_3^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{T}_1 \tag{6.34}$$

Capítulo 7

Asignación Arbitraria de la Posición de los Polos

Considere un sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{7.1}$$

Arbitrariamente se selecciona una matriz $\mathbf{K}$ de manera que

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{7.2}$$

Lo que significa que la acción de control es determinada por el valor instantáneo de los estados. A este esquema de control tambien se le llama realimentación de los estados. $\mathbf{K}$ es la matriz de ganancia de realimentación de los estados. Se asume que $\mathbf{u}(t)$ puede tomar cualquier valor, es decir, no tiene restricciones.

Substituyendo el valor de $\mathbf{u}(t)$ en la ecuación de estado se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \tag{7.3}$$

La solución de esta ecuación es

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}(0) \tag{7.4}$$

La estabilidad y las características de respuesta del sistema queda definido por los autovalores de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$. Si la matriz $\mathbf{K}$ se selecciona apropiadamente la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ podría convertirse en una matriz asintóticamente estable.

7.1 Fórmula de Ackermann

Dado un systema descrito por la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{7.5}$$

El objetivo es encontrar una ley de control por realimentación de los estados

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{7.6}$$

Tal que el polinomio característico en lazo cerrado sea

$$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) \tag{7.7}$$

Primero se debe seleccionar el $\alpha_c(s)$ que define la nueva localización de los polos. Entonces se debe calcular K a partir de la ecuación (7.7). La técnica requiere que la ecuación de estado sea transformada a la forma controlable canónica.

Para comenzar se considerará el efecto de una transformación de estado no singular arbitraria

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}(t) \tag{7.8}$$

Donde $\mathbf{z}(t)$ es el nuevo estado transformado. Las ecuaciones de estado en las nuevas coordenadas son

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{7.9}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{7.10}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{7.11}$$

La matriz de controlabilidad para la ecuación de estado (7.5) es

$$\mathcal{C}_x = \left[\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \tag{7.12}$$

La matriz de controlabilidad para la ecuación de estado (7.11) es

$$\mathcal{C}_z = \left[\bar{\mathbf{B}} \vdots \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \vdots \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} \vdots \cdots \vdots \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}\right] \tag{7.13}$$

Las dos matrices de controlabilidad están relacionadas por

$$\mathcal{C}_z = \left[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \vdots \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \cdots \vdots \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{C}_x \tag{7.14}$$

De la ecuación (7.14) se obtiene que

$$\mathbf{T} = \mathcal{C}_x\mathcal{C}_z^{-1} \tag{7.15}$$

De la ecuación (7.14) se puede concluir que la matriz de transformación no singular $\mathbf{T}$ existe si y solo si la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}_x$ es también no singular ($\mathbf{T}^{-1} = \mathcal{C}_z\mathcal{C}_x^{-1}$).

Se puede concluir que un sistema siempre se puede transformar en la realización controlable canónica si y solo si el sistema es controlable.

El diseño de la ley de control por realimentación de los estados $\mathbf{u}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{z}(t)$ es trivial si el sistema está expresado en la forma controlable canónica.

Suponga que

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

La ecuación característica para esta realización en lazo abierto es

$$\alpha_o(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n \tag{7.17}$$

Defina

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{K}_n & \bar{K}_{n-1} & \cdots & \bar{K}_2 & \bar{K}_1 \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

entonces

$$\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \bar{K}_n & \bar{K}_{n-1} & \cdots & \bar{K}_2 & \bar{K}_1 \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

y

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n - \bar{K}_n & -a_{n-1} - \bar{K}_{n-1} & \cdots & -a_2 - \bar{K}_2 & -a_1 - \bar{K}_1 \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

Lo que implica que la ecuación característica para la realización en lazo cerrado al aplicarle la ley de control $\mathbf{u}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{z}(t)$ es

$$\alpha_c(s) = s^n + \left(a_1 + \bar{K}_1\right)s^{n-1} + \ldots + \left(a_{n-1} + \bar{K}_{n-1}\right)a_{n-1}s + \left(a_n + \bar{K}_n\right) \tag{7.21}$$

Para colocar los polos en los valores deseados, se crea la ecuación característica:

$$\alpha_c(s) = (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n \tag{7.22}$$

Lo que implica que

$$a_i + \bar{K}_i = \alpha_i \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.23}$$

En forma vectorial

$$\mathbf{a}+\mathbf{K}=\boldsymbol{\alpha} \tag{7.24}$$

Donde $\mathbf{a}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son los vectores columna que contienen los coeficientes de los polinomios característicos en lazo abierto y lazo cerrado, respectivamente.

Para encontrar la relación entre estos parámetros y la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ se usará el teorema de Cayley-Hamilton, el cual establece que una matriz satisface su propia ecuación característica.

Lo que en este estudio implica que

$$\alpha_o\left(\bar{\mathbf{A}}\right)=\bar{\mathbf{A}}^n+a_1\bar{\mathbf{A}}^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\bar{\mathbf{A}}+a_n\mathbf{I}=\mathbf{0} \tag{7.25}$$

De la misma manera si se evalua el polinomio formado en lazo cerrado para cuando $s=\bar{\mathbf{A}}$, se tiene

$$\alpha_c\left(\bar{\mathbf{A}}\right)=\bar{\mathbf{A}}^n+\alpha_1\bar{\mathbf{A}}^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}\bar{\mathbf{A}}+\alpha_n\mathbf{I} \tag{7.26}$$

Despejando $\bar{\mathbf{A}}^n$ de la ecuación (7.25) y substituyendole en la ecuación (7.26) se tiene

$$\alpha_c\left(\bar{\mathbf{A}}\right)=\left(\alpha_1-a_1\right)\bar{\mathbf{A}}^{n-1}+\ldots+\left(\alpha_{n-1}-a_{n-1}\right)\bar{\mathbf{A}}+\left(\alpha_n-a_n\right)\mathbf{I} \tag{7.27}$$

Lo que es equivalente a

$$\alpha_c\left(\bar{\mathbf{A}}\right)=\bar{K}_1\bar{\mathbf{A}}^{n-1}+\ldots+\bar{K}_{n-1}\bar{\mathbf{A}}+\bar{K}_n\mathbf{I} \tag{7.28}$$

Debido a la forma particular que tiene la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ se observa que

$$\bar{K}_n\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \bar{K}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{K}_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{K}_n \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

$$\bar{K}_{n-1}\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 0 & \bar{K}_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{K}_{n-1} \\ * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

Donde: $*$ denota cualquier número.

Este procedimiento se continua hasta $\bar{\mathbf{A}}^{n-1}$ donde

$$\bar{\mathbf{A}}^{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \tag{7.31}$$

Lo que implica que

$$\bar{K}_1\bar{\mathbf{A}}^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{K}_1 \\ * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

Sumando todos estos términos se obtiene

$$\alpha_c\left(\bar{\mathbf{A}}\right) = \begin{bmatrix} \bar{K}_n & \bar{K}_{n-1} & \cdots & \bar{K}_2 & \bar{K}_1 \\ * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

Defina

$$\mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.34}$$

Lo que implica que el vector $\bar{\mathbf{K}}$ se obtiene como

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{e}_1^T\alpha_c\left(\bar{\mathbf{A}}\right) = \begin{bmatrix} \bar{K}_n & \bar{K}_{n-1} & \cdots & \bar{K}_2 & \bar{K}_1 \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

Para obtener el vector de ganacias $\mathbf{K}$ para el sistema original se tiene que

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}\right)\mathbf{z}(t) \tag{7.36}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}}(t) = \left(\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{T}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}\right)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \tag{7.37}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1}\right)\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\,\mathbf{x}(t) \tag{7.38}$$

Lo que implica que

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{e}_1^T\alpha_c\left(\bar{\mathbf{A}}\right)\mathbf{T}^{-1} \tag{7.39}$$

Substituyendo la matriz $\mathbf{A}$ del sistema original

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_1^T\alpha_c\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{e}_1^T\mathbf{T}^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{e}_1^T\mathcal{C}_z\mathcal{C}_x^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}) \tag{7.40}$$

Donde

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathcal{C}_z\mathcal{C}_x^{-1} \tag{7.41}$$

Además se tiene que

$$\mathcal{C}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \tag{7.42}$$

Lo que implica que

$$\mathbf{e}_1^T \mathcal{C}_z = \mathbf{e}_n^T = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \tag{7.43}$$

Entonces

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_n^T \mathcal{C}_x^{-1} \alpha_c (\mathbf{A}) \tag{7.44}$$

La ecuación (7.44) recibe el nombre de fórmula de Ackermann.

Desde el punto de vista numérico no es recomendable calcular explícitamente la inversa de una matriz, así que se recomienda, sobre todo en sistemas con un gran número de variables de estado, resolver por partes definiendo

$$\mathbf{b}^T = \mathbf{e}_n^T \mathcal{C}_x^{-1} \tag{7.45}$$

Donde

$$\mathbf{b} = \mathcal{C}_x^{-T} \mathbf{e}_n \tag{7.46}$$

Se obtiene el sistema lineal de ecuaciones

$$\mathcal{C}_x^T \mathbf{b} = \mathbf{e}_n \tag{7.47}$$

Resolviendo a través de un método más estable numéricamente como Gauss con pivote parcial se obtiene el vector **b**.

Finalmente

$$\mathbf{K} = \mathbf{b}^T \alpha_c (\mathbf{A}) \tag{7.48}$$

7.2 Bibliografía

FRANKLIN, Gene F.; POWELL J. David y EMAMI-NAEINI Abbas

Feedback Control of Dynamic Systems, 3rd edition, Addison-Weshley Publishing Company, Inc., 1994.

7.3 Ejercicios

1) Verifique la controlabilidad y observabilidad de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&2&-1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\quad,\quad\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\tag{7.49}$$

2) Para el siguiente sistema dinámico, seleccione (si es posible) un estado inicial $\mathbf{x}(0)$ tal que la respuesta natural del sistema sea de la forma $y(t)=te^{-t}$ para $t>0$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\quad,\quad\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\tag{7.50}$$

3) Reduzca la siguiente ecuación dinámica a la ecuación dinámica mínima; es decir, controlable y observable.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0&0\\0&\lambda_1&1&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\quad,\quad\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\tag{7.51}$$

4) Para la función de transferencia $G(s)=1/\left(s^3+1\right)$, encuentre

a) Una realización irreducible (mínima).
b) Una realización controlable y no observable.
c) Una realización no controlable y observable.
d) Una realización no controlable y no observable.

5) Implemente en MATLAB el algoritmo de descomposición de Kalman. Los argumentos de salida deben ser la nueva realización $\left\{\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}}\right\}$, la realización mínima $\left\{\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}},\hat{\mathbf{C}}\right\}$ y la matriz de transformación $\mathbf{T}$.

6) Encuentre la descomposición de Kalman y la mínima realización para:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2&1&0&0&0&0\\0&-2&1&0&0&0\\0&0&-2&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&0&-5\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\quad,\quad\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\tag{7.52}$$

Capítulo 8

Entrada de Referencia

La estrategia de control obtenida por realimentación de los estados tiene como objetivo la colocación de los polos de tal manera que el sistema resultante sea absolutamente estable, es decir

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \tag{8.1}$$

Este resultado sólo es útil si se desea estabilizar un sistema de manera que su salida sea igual a cero. También resulta útil si el modelo del sistema lineal (ecuación de estado y ecuación de salida) es obtenido a partir de la linealización de un sistema, ya que en este caso $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ son vectores de desviación con respecto al punto de operación, lo que implica que una vez que $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ tienden a cero, las variable absoluta asociada a la salida $\mathbf{y}(t)$ realmente tiende al valor deseado.

Para extender esta idea para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{8.2}$$

Este sistema originalmente es lineal y se necesita que la salida $\mathbf{y}(t)$ siga una referencia $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}$, donde $\mathbf{R}$ es un vector constante.

Este problema se resuelve aplicando un procedimiento similar a la linealización. Debido a que el sistema es lineal el procedimiento consiste solo en un cambio de coordenadas.

Defina $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{op}$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{op}$ y $\boldsymbol{\delta}\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{op}$.

Donde

$\mathbf{y}_{op} = \mathbf{y}_{ref} = \mathbf{R}$

Además se debe cumplir que para el punto de operación

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t)}{dt}\right|_{op} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_{op} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{op} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{y}_{op} = \mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{op} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{op} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Agrupando estas condiciones en un solo sistema de ecuaciones se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{op} \\ \mathbf{u}_{op} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Lo que implica que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{op} \\ \mathbf{u}_{op} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

El control por realimentación de los estados se calcula para el sistema

$$\begin{array}{l} \dfrac{d\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\delta}\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}(t) \end{array} \tag{8.6}$$

Donde para el sistema original se tiene

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}_{op} \\ \mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_{op} = \mathbf{u}_{op} - \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) \\ \mathrm{y}(t) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{y}(t) + \mathbf{R} = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K})\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) + \mathbf{R} \end{array} \tag{8.7}$$

Donde

$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t)$ puede ser calculado analíticamente o numéricamente a partir de la ecuación de estado

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) \tag{8.8}$$

Con la condición inicial

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{op} \tag{8.9}$$

Capítulo 9

Sistemas No Mínimos

En el caso de los sistemas que no son mínimos, es decir, que no son controlables y/u observables, el control por realimentación de los estados se puede calcular sólo para la realización mínima y despues de trasfiere la matriz de ganancias al sistema original usando la matriz de transformación por similaridad.

En la realización de Kalman se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbb{A}\mathbf{z}(t) + \mathbb{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbb{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{9.1}$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \left[\begin{array}{cc} \begin{matrix} \mathring{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathring{\mathbf{A}}_{21} & \mathring{\mathbf{A}}_{22} \end{matrix} & * \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} \dot{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{A}}_{21} & \dot{\mathbf{A}}_{22} \end{matrix} \end{array}\right] \qquad \mathbb{B} = \left[\begin{array}{c} \mathring{\mathbf{B}}_1 \\ \mathring{\mathbf{B}}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \\ \mathbb{C} &= \left[\begin{array}{cccc} \mathring{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \\ \mathbb{B} &= \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbb{C} &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \tag{9.3}$$

La realización mínima está representada por la realización $\left\{\mathring{\mathbf{A}}_{11}, \mathring{\mathbf{B}}_1, \mathring{\mathbf{C}}_1\right\}$.

Usando la realización mínima se selecciona la localización final de los polos correspondientes a sus estados y usando la fórmula de Ackermann se calcula $\mathring{\mathrm{K}}$.

Para calcular la ganancia para el sistema original se define

$$\mathbb{K} = \left[\begin{array}{cc} \mathring{\mathrm{K}} & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{9.4}$$

El control por realimentación de los estados es aplicado para la realización de Kalman en la siguiente forma

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbb{K}\mathbf{z}(t) \tag{9.5}$$

Donde

$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Tx}(t)$, si $\mathbf{T}$ es invertible $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t)$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbb{A}\mathbf{Tx}(t) - \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbf{Tx}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbb{C}\mathbf{Tx}(t) + \mathbf{Du}(t)\end{aligned} \tag{9.6}$$

Acomodando algunos términos se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \left(\mathbf{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{K}\mathbf{T}\right)\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbb{C}\mathbf{Tx}(t) + \mathbf{Du}(t)\end{aligned} \tag{9.7}$$

Donde

$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{T}$

$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbb{B}$

$\mathbf{K} = \mathbb{K}\mathbf{T}$

$\mathbf{C} = \mathbb{C}\mathbf{T}$

En conclusión el valor de la matriz de ganancia para el sistema original es

$$\mathbf{K} = \mathbb{K}\mathbf{T} \tag{9.8}$$

Capítulo 10

Diseño de Estimadores

Para el diseño del sistema de control por realimentación de los estados se ha asumido que todas las variables de estado están disponibles para realimentación. En la mayoría de los casos, todas las variables de estado no son medidas. La principal razón es porque el costo asociado con la compra, instalación y mantenimiento de los sensores es muy elevado, o porque físicamente es imposible medir todas las variables de estado.

Si el estado que se ha estimado se denota como $\hat{\mathbf{x}}(t)$, será conveniente reemplazar el verdadero estado en la ley de control con este valor estimado, de manera que la ley de control es

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \tag{10.1}$$

Las condiciones que se requieren para usar esta alternativa serán discutidas a continuación

10.1 Estimadores de Orden Completo

Uno de los métodos para estimar los estados consiste en construir un modelo de orden completo de las dinámicas del sistema,

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{10.2}$$

Donde

$\hat{\mathbf{x}}(t)$: Estimado de los valores reales de $\mathbf{x}(t)$.

Como se puede observar la ecuación de estado para el observador o estimador es exactamente igual a la del sistema real. Esto implica que si las condiciones iniciales de ambas ecuaciones de estado $\mathbf{x}(0)$ y $\hat{\mathbf{x}}(0)$ son iguales, al aplicar la entrada $\mathbf{u}(t)$, la respuesta de ambos sistemas será exactamente igual. Como justamente la falta de información es un problema bastante generalizado en la industria, los estimadores serán diseñados para que a partir de una aproximación inicial arbitraria de las condiciones iniciales, eventualmente el método logre que $\hat{\mathbf{x}}(t)$ tienda a $\mathbf{x}(t)$.

Para estudiar las dinámicas del estimador se define el error del estimador como

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \tag{10.3}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (10.3) se tiene

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} \tag{10.4}$$

Substituyendo las ecuaciones de estado del sistema real y del estimador se tiene

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \tag{10.5}$$

Acomodando los términos se tiene

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t) \tag{10.6}$$

De la ecuación (10.6) se observa que si la matriz $\mathbf{A}$ es estable el error tiende a cero a la velocidad de convergencia natural que tenga el sistema, la cual es una función directa de los polos dominantes del sistema.

Si la velocidad de convergencia a cero es suficientemente rápida como para ser satisfactoria, se hace innecesaria la estimación e incluso el control.

Si el sistema no es estable o los polos dominantes hacen que la rata de convergencia sea muy lenta, entonces es necesario usar una ley de realimentación.

Suponga que se adiciona un lazo de realimentación en la definición de $\hat{\mathbf{x}}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \tag{10.7}$$

Donde el último término es una correción basada en la diferencia entre la salida medida $\mathbf{y}(t)$ y la salida estimada $\hat{\mathbf{y}}(t)$.

Asumiendo que el sistema es estrictamente propio se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \tag{10.8}$$

Recalculando

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} \tag{10.9}$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))) \tag{10.10}$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \tag{10.11}$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \tag{10.12}$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\,\mathbf{e}(t) \tag{10.13}$$

De la ecuación (10.13) se observa el comportamiento dinámico del vector de error está determinado por la localización de los autovalores de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$. Si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier valor inicial de $\mathbf{e}(0)$.

Si el sistema es completamente observable, se puede probar que es posible escoger una matriz $\mathbf{L}$, tal que la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ tenga los autovalores en cualquier localización arbitraria.

Debido a que el problema de la estimación es el dual al problema de control por realimentación de las variables de estado, es suficiente denotar convencionalmente

$$\begin{gathered} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^T \\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^T \\ \mathbf{K} = \mathbf{L}^T \end{gathered} \tag{10.14}$$

En este caso se calcula la matriz $\mathbf{K}$ usando las técnicas para control descritas en la sección respectiva, tales como la ecuación de Ackermann, tambien se debe hacer un análisis de Kalman para determinar cuales estados son controlables (observables) o no. Al finalizar se despeja la matriz $\mathbf{L}$ a partir de la convención adoptada previamente.

10.2 Realimentación de Estados Estimados

En el diseño de sistemas de control por colocación arbitaria de los polos usando realimentación de los estados, se asume que los estados $\mathbf{x}(t)$ estaban disponibles para realimentación. En la práctica; sin embargo, el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ podría no ser medible, entonces se necesita diseñar un observador de estados para estimar $\hat{\mathbf{x}}(t)$ y realimentarlo en el lazo de control a través de la matriz de control $\mathbf{K}$.

En este caso el diseño se hace en dos etapas, una para determinar la matriz de control $\mathbf{K}$ y otra para determinar la matriz de ajuste del observador $\mathbf{L}$.

En el caso de acoplar el estimador y el controlador es necesario entonces hacer un estudio acerca de las implicaciones que está conexión en la estabilidad del sistema global.

Considere un sistema completamente controlable y observable descrito por la siguiente ecuación dinámica

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) \end{gathered} \tag{10.15}$$

La ley de control usando el vector de estado estimado es

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \tag{10.16}$$

Substituyendo $\mathbf{u}(t)$ en la ecuación de estado se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}\,(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \tag{10.17}$$

La diferencia entre el estado $\mathbf{x}(t)$ y el estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ se definió previamente como el error $\mathbf{e}(t)$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \tag{10.18}$$

Substituyendo el vector de error $\mathbf{e}(t)$ en la ecuación (10.17) se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{BKe}(t) \tag{10.19}$$

Por otra parte la ecuación dinámica del error que fue obtenida anteriormente se repite aquí

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\,\mathbf{e}(t) \tag{10.20}$$

Combinado las ecuaciones (10.19) y (10.20) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \tag{10.21}$$

La ecuación característica de este sistema es

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{vmatrix} = 0 \tag{10.22}$$

o

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = 0 \tag{10.23}$$

Se demuestra entonces que los polos del sistema global consisten sólo de los polos obtenidos en el diseño del controlador por colocación de los polos más sólo los polos obtenidos en el diseño del observador de estados. Esto significa que los procedimientos para diseñar el controlador por colocación de los polos y para diseñar el observador de estados son independientes entre sí. Esto implica también que ellos pueden ser diseñados separadamente y combinados para formar el sistema control por realimentación de estados estimados. Por esta razón a este resultado se le denomina **Principio de Separación**. Si el orden de la ecuación de estado es n, el orden del sistema de control más un observador de orden completo será de orden $2n$.

En la Figura 1 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación de estados estimados.

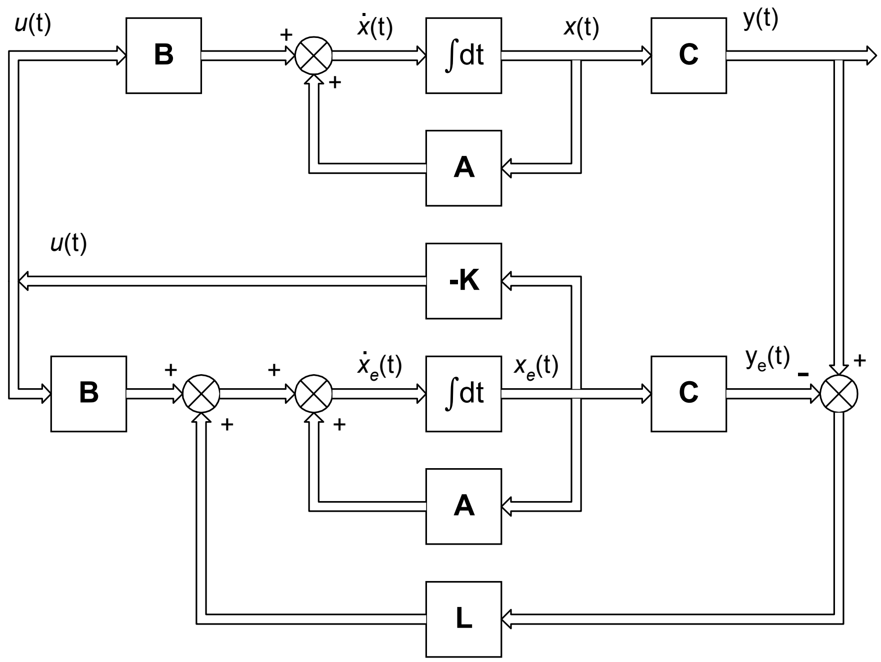

Figura 1: Sistema de Control - Observador

10.3 Estimadores de Orden Reducido

Considere la ecuación dinámica

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{10.24}$$

Donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son, respectivamente, $n \times n$, $n \times p$ y $q \times n$, matrices de constantes reales. Si se asume que la matriz $\mathbf{C}$ es de rango completo, es decir, $rango(\mathbf{C}) = q$. Defina

$$\mathbf{T} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{10.25}$$

Donde $\mathbf{R}$ es una matriz de constantes reales $(n-q) \times n$ con valores que pueden ser seleccionados arbitrariamente de manera tal que $\mathbf{T}$ no sea singular. Defina

$$\mathbf{Q} \triangleq \mathbf{T}^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \tag{10.26}$$

Donde $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ son, respectivamente, $n \times q$ y $n \times (n-q)$ matrices de constantes reales. Se tiene entonces

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{T}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \tag{10.27}$$

Aplicando una transformación de similaridad a la ecuación dinámica (10.24) usando la transformación equivalente $\mathbf{g}(t) = \mathbf{Tx}(t)$

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{g}(t) + \mathbf{TBu}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{CQg}(t) = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \end{array} \right] \mathbf{g}(t) \end{array} \tag{10.28}$$

Creando particiones en la ecuación dinámica (10.28) se tiene

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{g}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{g}}_2(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(t) \\ \mathbf{g}_2(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{array} \right] \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(t) \\ \mathbf{g}_2(t) \end{array} \right] = \mathbf{g}_1(t) \end{array} \tag{10.29}$$

Donde $\mathbf{g}_1(t)$ son los primeros q elementos de $\mathbf{g}(t)$ y $\mathbf{g}_2(t)$ son los remanentes $n-q$ estados; $\bar{\mathbf{A}}_{11}$, $\bar{\mathbf{A}}_{12}$, $\bar{\mathbf{A}}_{21}$ y $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ son, respectivamente, matrices $q \times q$, $q \times (n-q)$, $(n-q) \times q$ y $(n-q) \times (n-q)$; $\bar{\mathbf{B}}_1$ y $\bar{\mathbf{B}}_2$ son, respectivamente, matrices $q \times p$ y $(n-q) \times p$.

De la ecuación dinámica (10.29) se observa que $\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{y}(t)$ y debido a que $\mathbf{y}(t)$ es medible entonces los estados $\mathbf{g}_1(t)$ son conocidos así que sólo es necesario estimar los estados contenidos en $\mathbf{g}_2(t)$.

En consecuencia, es necesario construir un estimador de estados de dimensión $(n-q)$ en lugar el observador de estados de orden completo o dimensión n.

Usando la equivalencia $\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{y}(t)$ se puede escribir la ecuación dinámica (10.29) como

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{g}_2(t) + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{g}}_2(t) = \bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{g}_2(t) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t) \end{array} \tag{10.30}$$

Defina

$$\begin{array}{l} \bar{\mathbf{u}}(t) \triangleq \bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{w}(t) \triangleq \dot{\mathbf{y}}(t) - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t) \triangleq \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{g}_2(t) \end{array} \tag{10.31}$$

Donde se observa que $\bar{\mathbf{u}}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$ son funciones de las señales conocidas $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$.

Usando estas nuevas variables se construye la ecuación dinámica

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{g}}_2(t) = \bar{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{g}_2(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{w}(t) = \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{g}_2(t) \end{array} \tag{10.32}$$

Donde se puede construir un estimador de estados para $\mathbf{g}_2(t)$ si el par $\left\{\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{12}\right\}$ es observable. Defina

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_2(t)}{dt} = \bar{\mathbf{A}}_{22}\hat{\mathbf{g}}_2(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \tag{10.33}$$

Donde $\hat{\mathbf{g}}_2(t)$ es el estimado de $\mathbf{g}_2(t)$.

Adicionando un lazo de realimentación de la misma manera que se hizo en el diseño del observador de estados de orden completo se tiene

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_2(t)}{dt} = \bar{\mathbf{A}}_{22}\hat{\mathbf{g}}_2(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{w}(t) - \hat{\mathbf{w}}(t)) \tag{10.34}$$

Substituyendo $\bar{\mathbf{u}}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ y $\hat{\mathbf{w}}(t)$ se tiene

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_2(t)}{dt} = \bar{\mathbf{A}}_{22}\hat{\mathbf{g}}_2(t) + \bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\left(\dot{\mathbf{y}}(t) - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{A}}_{12}\hat{\mathbf{g}}_2(t)\right) \tag{10.35}$$

Reacomodando términos se tiene

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_2(t)}{dt} = \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)\hat{\mathbf{g}}_2(t) + \left(\bar{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{11}\right)\mathbf{y}(t) + \left(\bar{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_1\right)\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\dot{\mathbf{y}}(t) \tag{10.36}$$

Donde se observa que esta ecuación contiene la derivada de $\mathbf{y}(t)$, lo cual es desaconsejable ya que esta operación amplifica significativamente el ruido que generalmente posee la medición de $\mathbf{y}(t)$. Esta derivada puede ser eliminada si se define

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{g}}_2(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \tag{10.37}$$

Entonces se tiene

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{g}}_2(t)}{dt} - \mathbf{L}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \tag{10.38}$$

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)(\mathbf{z}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)) + \left(\bar{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{11}\right)\mathbf{y}(t) + \left(\bar{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_1\right)\mathbf{u}(t) \tag{10.39}$$

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)\mathbf{z}(t) + \left(\bar{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{11} + \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)\mathbf{L}\right)\mathbf{y}(t) + \left(\bar{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_1\right)\mathbf{u}(t) \tag{10.40}$$

Donde $\mathbf{z}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$ es un estimado de $\mathbf{g}_2(t)$ que eventualmente converge a $\mathbf{g}_2(t)$, lo cual se puede demostrar si se define

$$\mathbf{e}(t) \triangleq \mathbf{g}_2(t) - (\mathbf{z}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)) \tag{10.41}$$

se tiene entonces que

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} \triangleq \frac{d\mathbf{g}_2(t)}{dt} - \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} - \mathbf{L}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \tag{10.42}$$

Substituyendo se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} \quad = \quad & \left(\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{g}_2(t) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t)\right) - \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)\mathbf{z}(t) - && \text{(10.43a)} \\
& \left(\bar{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{11} + \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)\mathbf{L}\right)\mathbf{y}(t) - && \text{(10.43b)} \\
& \left(\bar{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_1\right)\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\left(\bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{g}_2(t) + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t)\right) && \text{(10.43c)}
\end{aligned}$$

Arreglando términos se tiene

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)(\mathbf{g}_2(t) - \mathbf{z}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t)) \tag{10.44}$$

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)\mathbf{e}(t) \tag{10.45}$$

Si el par $\left\{\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{12}\right\}$ es observable, entonces los polos de la matriz $\left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{12}\right)$ pueden ser colocados arbitrariamente, y la velocidad de convergencia de $\mathbf{e}(t)$ a cero o, equivalentemente, la velocidad con que $\mathbf{z}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$ se aproxima a $\mathbf{g}_2(t)$ puede ser definida por el diseñador.

Combinando $\hat{\mathbf{g}}_1(t) = \mathbf{g}_1(t) = \mathbf{y}(t)$ con $\hat{\mathbf{g}}_2(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$ se forma

$$\hat{\mathbf{g}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{t}) \\ \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \tag{10.46}$$

Debido a que $\mathbf{g}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$, se tiene que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{g}(t)$, lo que implica que

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{g}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \tag{10.47}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \tag{10.48}$$

Discusión: El estimador de orden reducido requiere la transformación de similaridad para separar los estados medibles de los que no lo son. Excluyendo este paso, los cálculos necesarios en el caso del observador de orden reducido son claramente menos que en el caso del observador de orden completo. En la implementación, el primero también requiere de menos integradores. En el caso del observador de orden reducido, la señal de salida $\mathbf{y}(t)$ es alimentada a través de la matriz $\mathbf{Q}_1$ a la salida del estimador. En consecuencia, si $\mathbf{y}(t)$ es corrupto con ruidos, estos ruidos aparecerán en la salida del estimador. En el estimador de orden completo, la señal $\mathbf{y}(t)$ es integrada o filtrada; por lo tanto ruidos de alta frecuencia en $\mathbf{y}(t)$ serán suprimidos en el estimador de orden completo.

10.4 BIBLIOGRAFIA

CHEN, Chi-Tsong
Linear System Theory and Design, Ed. Holt, Rinehart and Winston, Florida, USA, 1984

Capítulo 11

Control Integral

La estructura de control de realimentación de los estados tiene como deficiencia que no mejora el tipo del sistema. En consecuencia, el control por realimentación de los estados con ganancia constante sólo es útil para sistemas reguladores en los cuales no se debe seguir alguna entrada. En general, existe una gran cantidad de sistemas de control en los cuales se debe seguir una señal de referencia, y frecuentemente también existe la presencia de ruido indeseable o perturbaciones que el sistema debe suprimir o rechazar. Una de las opciones para resolver los problemas planteados consiste en la introducción de control integral, para acompañar la realimentación de estados con ganancia constante.

Suponga que el sistema está descrito por la siguiente realización:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{e}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}\mathbf{w}(t) \end{aligned} \tag{11.1}$$

Donde:

$\mathbf{x}(t) = n \times 1$ vector de estados.
$\mathbf{u}(t) = m \times 1$ vector de control.
$\mathbf{w}(t) = p \times 1$ vector de perturbaciones.
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}(t) = q \times 1$ vector de salida $=$ vector de error.
$\mathbf{A} = n \times n$.
$\mathbf{B} = n \times m$.
$\mathbf{F} = n \times p$.
$\mathbf{C} = q \times n$.
$\mathbf{H} = q \times p$.

$\mathbf{w}(t)$ se define como un vector constante cuyos elementos están compuestos de señales de entrada y perturbaciones. En la práctica, las magnitudes de las señales de entrada son dadas, pero las magnitudes de algunas o todas las perturbaciones son desconocidas.

El objetivo de diseño es encontrar controles por realimentación de las variables de estado de manera tal que el estado $\mathbf{x}(t)$ sea transferido a cualquier estado deseado (set point) cuando el tiempo tienda a infinito. Por ejemplo, se desea que la variable de estado $x_1(t)$ sea transferida a un valor deseado $r(t) = R$ cuando t tiende a infinito, mientras el sistema global es asintóticamente estable.

Transferir el estado $x_1(t)$ hasta el valor deseado $r(t)$ es equivalente a transferir

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{w}_1(t) - \mathbf{x}_1(t) \tag{11.2}$$

a cero cuando t tiende a infinito, donde $\mathbf{w}_1(t) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{R} =$ constante.
Defina una ley de control

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_1\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_2\int \mathbf{e}(\tau)\,d\tau \tag{11.3}$$

Defina además

$$\mathbf{x}_e(t) = \int \mathbf{e}(\tau)\,d\tau \tag{11.4}$$

Donde
$K_1 = m \times n$ matriz de realimentación de ganancias.
$K_2 = m \times q$ matriz de realimentación de ganancias. (ambas con elementos constantes).

A partir de la ecuación (11.4) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}\mathbf{w}(t) \tag{11.5}$$

Aumentando el sistema original se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) \tag{11.6}$$

O lo que es equivalente

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{F}}\mathbf{w}(t) \tag{11.7}$$

Donde

$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix}$ $(n+q) \times 1$

$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ $(n+q) \times (n+q)$

$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ $(n+q) \times m$

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}$ $m \times (n+q)$

$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ $(n+q) \times p$

La ecuación (11.7) también se escribe como:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\right)\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{F}}\mathbf{w}(t) \tag{11.8}$$

La cual aparece en la forma de realimentación de los estados.

11.1 Bibliografía

KUO, Benjamin C.
Automatic Control Systems, 6th edition, Prentice-Hall, Inc., 1991.