Capítulo 4

Transformaciones de Similitud

Un sistema es representado usando variables de estado a través de realizaciones, las cuales consisten de una ecuación de estado y una ecuación de salida (en términos vectoriales). Las realizaciones básicamente son descripciones de un mismo sistema que dependen del método usado para obtenerlas y que en ciertos casos permiten visualizar o calcular facilmente algunas de las características o propiedades del sistema.

Las realizaciones más usados son las formas canónicas: controlable, observable, de Jordan o diagonal o en paralelo, cascada o serie y las realizaciones físicas en las cuales los estados están asociados a la energía almacenada dinámicamente en el sistema.

Debido a que frecuentemente es necesario usar en la resolución de un problema más de una realización es necesario una herramienta algebraica para efectuar este tipo de operación. Tal herramienta son las matrices de transformación, las cuales se definen de la siguiente manera:

Suponga que un sistema dinámicos es descrito por dos realizaciones:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{4.2}$$

y

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \tag{4.4}$$

Se define una matriz de transformación de estados $\mathbf{T}$ de manera que:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \tag{4.5}$$

si T es invertible se cumple además que:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(t) \tag{4.6}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.5) se tiene

$$\frac{d\mathbf{z}\,(t)}{dt} = \mathbf{T}\frac{d\mathbf{x}\,(t)}{dt} \tag{4.7}$$

Substituyendo la ecuación (4.1) en la ecuación (4.7) se tiene

$$\frac{d\mathbf{z}\,(t)}{dt} = \mathbf{TAx}\,(t) + \mathbf{TBu}\,(t) \tag{4.8}$$

Substituyendo la ecuación (4.6) en la ecuación (4.8) se tiene

$$\frac{d\mathbf{z}\,(t)}{dt} = \mathbf{TAT^{-1}z}\,(\mathbf{t}) + \mathbf{TBu}\,(t) \tag{4.9}$$

Para la salida se tiene

$$\mathbf{y}\,(t) = \mathbf{Cx}\,(t) + \mathbf{Du}\,(t) \tag{4.10}$$

Substituyendo la ecuación (4.6) en la ecuación (4.10) se tiene

$$\mathbf{y}\,(t) = \mathbf{CT^{-1}z}\,(\mathbf{t}) + \mathbf{Du}\,(t) \tag{4.11}$$

Comparando la ecuación (4.3) con la ecuación (4.9) y la ecuación (4.4) con la ecuación (4.11) se tiene

$$\begin{array}{c} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1} \\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{TB} \\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}^{-1} \\ \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{array} \tag{4.12}$$

Debido a que las matrices de las realizaciones generalmente tienen muchos elementos con ceros, la matriz de transformación $\mathbf{T}$ no tiene solución única, asi que se le agregan condiciones (como la invertibilidad y un adecuado condicionamiento) para obtener una solución.

Ejemplo:

Suponga que un sistema es descrito por dos realizaciones en las cuales

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

y

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Como $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1}$ entonces

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T} = \mathbf{TA} \tag{4.15}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Calculando el producto de las matrices en la ecuación (4.16) se tiene

$$\left[\begin{array}{cc} -3T_{11}+5T_{21} & -3T_{12}+5T_{22} \\ -2T_{21} & -2T_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -3T_{11} & -2T_{12} \\ -3T_{21} & -2T_{22} \end{array}\right] \tag{4.17}$$

Igualando cada uno de los elementos de las matrices en la ecuación (4.17) se tiene

$$\begin{gathered} -3T_{11}+5T_{21}=-3T_{11} \\ -3T_{12}+5T_{22}=-2T_{12} \\ -2T_{21}=-3T_{21} \\ -2T_{22}=-2T_{22} \end{gathered} \tag{4.18}$$

Resolviendo la ecuación (4.18) se tiene

$$\begin{gathered} T_{21}=0 \\ 5T_{22}=T_{12} \\ T_{21}=0 \\ T_{22}=T_{22} \end{gathered} \tag{4.19}$$

Como se puede observar en la ecuación (4.19) la información obtenida no es suficiente para construir una matriz $\mathbf{T}$ única así que una posible matriz $\mathbf{T}$ es la siguiente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4.20}$$

Facilmente se puede demostrar que:

$$\mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4.21}$$

y

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4.22}$$

$$(\mathbf{TA})\,\mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -3 & -10 \\ 0 & -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4.23}$$

$$\left(\mathbf{TAT}^{-1}\right) = \left[\begin{array}{cc} -3 & 5 \\ 0 & -2 \end{array}\right] = \bar{\mathbf{A}} \tag{4.24}$$

Invariancia de los eigenvalues:

Para probar la invariancia de los eigenvalues ante una transformación lineal, se demostrará que los polinomios característicos de $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ y $\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\right|$ son idénticos.

Debido a que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes se tiene

$$\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\right| = \left|\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\right| \tag{4.25}$$

$$= \left|\mathbf{T}^{-1}\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\mathbf{T}\right| \tag{4.26}$$

$$= \left|\mathbf{T}^{-1}\right|\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{T}\right| \tag{4.27}$$

$$= \left|\mathbf{T}^{-1}\right|\left|\mathbf{T}\right|\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right| \tag{4.28}$$

$$= \left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\right|\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right| \tag{4.29}$$

$$= \left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right| \tag{4.30}$$

Con lo que se demuestra que los eigenvalues de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ son idénticos a los de $\mathbf{A}$.